国家“八五”重点图书规划项目

吴文俊 主编

北京师范大学出版社

ZHONGGUO SHUXUESHI DAXI



中国数学史大系

第三卷 东汉三国

国家"八五"重点图书规划项目

中国数学史大系

吴文俊 主编

本卷主编 白尚恕

第三卷 东汉三国





北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

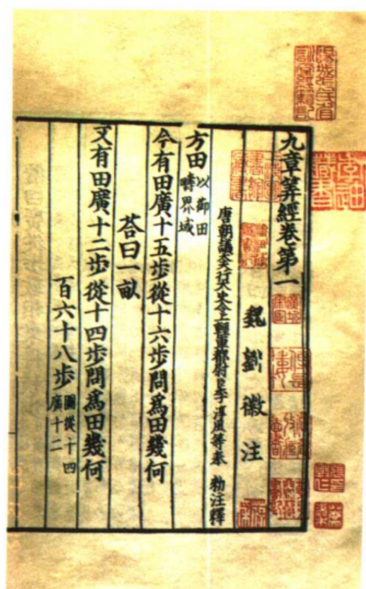
中国数学史大系　第3卷/吴文俊主编;白尚恕分主编．—北京:北京师范大学出版社,1998.9

ISBN 7-303-04557-0

Ⅰ.中…　Ⅱ.①吴…②白…　Ⅲ.数学史-中国　Ⅳ.O112

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第23318号

北京师范大学出版社出版发行
(100875　北京新街口外大街19号)
出版人:谢维和
北京东晓印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本:850mm×1 168mm　1/32　印张:13.875　字数:298千字
1998年9月北京第1版　1998年9月北京第1次印刷
印数:1～5 000册
定价:45.00元


九章筭經卷第一

魏 劉徽 注

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勑注釋

方田 以御田疇界域

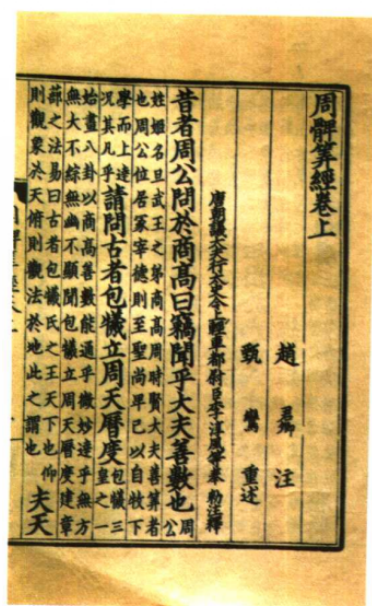
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何

荅曰一畝

又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

荅曰一百六十八步 圖從十四廣十二

影南宋刊本《九章算经》书影


周髀筭經卷上

趙君卿 注

甄鸞 重述

唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勑注釋

昔者周公問於商高曰竊聞乎大夫善數也 周公姓姬名旦武王之弟商高周時賢大夫善筭者也周公位居冢宰德則至聖尚卑己以自牧下學而上達況其凡乎

請問古者包犧立周天曆度 包犧三皇之一始畫八卦以商高善數能通乎微妙達乎無方無大不綜無幽不顯聞包犧立周天曆度建章蔀之法易曰古者包犧氏之王天下也仰則觀象於天俯則觀法於地此之謂也

夫天

影南宋刊本《周髀算经》书影



刘徽造像

蒋兆和造



张衡造像

蒋兆和造



吴文俊院士与《中国数学史大系》倡议者合影

由左至右：前排　沈康身　吴文俊　白尚恕

后排　李　迪　李继闵



1982年在比利时进行学术活动

由左至右：白尚恕　李　迪　席文夫人　席　文



1983年第二届中国科学史国际会议在香港召开

出席会议的部分代表

由左至右：薄树人　白尚恕　杨直民　蓝先生

蓝丽蓉　李　迪　沈康身　杜石然

序

1984 年间,四位中国数学史的专家教授,倡议缮写一部全面论述中国传统数学历史发展的巨大著作,取名为《中国数学史大系》,这四位教授(以年事为序)是:

北京师范大学的白尚恕教授;

杭州大学的沈康身教授;

内蒙古师范大学的李迪教授;

西北大学的李继闵教授。

中国传统数学源远流长,有其自身特有的思想体系与发展途径,从远古以至宋元,在很长一段时间内成为世界数学发展的主流,但自明代以来,由于政治社会等种种原因,特别如明末徐光启所指出的那样,一方面"名理之儒,土苴天下之实事",另方面"妖妄之术,谬言数有神理",致使中国传统数学濒于灭绝,以后全为西方欧几里得传统所凌替以至垄断,虽然康乾之世曾有一度重视,但仅止于发掘阐释古籍而已,循至 20 世纪中叶,李俨、钱宝琮先生撰写中国数学史专门著作进行介绍,使中国古算得以不绝如缕。到 70 年代特别是改革开放以来,全国兴起了研习中国传统数学的高潮,论著迭出,仅就对《九章算术》与注者刘徽的各种形式的专著,就在 10 种以上,其它方面论著之多,更难以统计,这些研究使中国传统数学的固有特色,如构造性、机械化、以及离散型的算法形式

等，与西方欧几里得传统迥然异趣，得以贻然在目，甚至国外数学史家，也表示了对中国古算的浓厚兴趣，李约瑟的中国科技史巨著固不待论，此外还酝酿了《九章算术》与刘徽注的英文与法文编译，尤其值得一提的是：《九章算术》刘徽注中关于阳马术的一段术文，过去认为有脱漏舛误而难以理解。丹麦的 Wagner 先生却给予了正确的解释，使中国古算中一段辉煌成就，得以大白于世。虽然如此，目前国内大部分群众对中国数学的成就和发展情况了解仍嫌不足，已有的同类书籍却偏于某一侧面，不能满足现在教学、科研或其他方面的需求。已有的工作与我国的发展形势还不太相称，国际学术界也有较强烈的要求，希望有大型的中国数学史著作问世。《大系》的倡议，可谓来自这些对客观形势的分析，有鉴于客观上有此必要而来。《大系》全书是编年史，自上古以迄清末，共分八卷，各卷自成断代史，除复原古代算法的形式，并对照以近代算法外，将尽量收入各家最新研究成果，以期能对中国古代数学的发展情况与辉煌成就作一次较彻底的清理与研究，借以达到发扬成绩，总结规律，预见未来并服务于我国四化建设的目的。

《大系》在白、沈与二李等四位倡议与领导之下，有不少中算史的专家学者参与了写作，规模之宏，在国内外还从未见过，可谓首创。不幸的是：在写作过程中，李继闵教授于 1993 年因病逝世，白尚恕教授也于 1995 年因肺癌逝世。这影响了编写进程，使《大系》的写作不得不一再延期，原来的计划也作了某些局部修改，所幸赖写作者的积

极工作，以及北师大出版社的高度热情，第一部分一、二、三卷自上古以迄以刘徽为中心的三国时代，终于问世。在《大系》全书不久即可全部出齐之际，聊志数语，以示庆贺。

1997.12.25

第三卷前言

本卷主要讲述从《九章算术》成书之后到刘徽，相当于东汉三国时代，绝对年代为公元1世纪初到3世纪60年代，约250年。内容的特点是《九章算术》和《周髀》这两部官书先后由官府有关机构流到民间，引起天文学家和数学家的注意，并进行了深入研究。其中赵爽的《周髀》注和刘徽的《九章算术》注流芳千古，特别是刘徽的工作更为重要，因此构成本卷的中心内容。

按照原来的分工，本卷的主编为白尚恕教授，因他于1995年3月16日不幸去世，主编工作基本上没有来得及进行。而李继闵教授更先于他而去世，使工作受到影响。但是我和沈康身教授在沉痛怀念他们的同时，对《中国数学史大系》的工作并未停止，而是一方面继续编撰其他各卷，另一方面对白先生主编的这一卷进行必要的处理。最后由我对本卷代行主编，而署名仍为白尚恕。我除了执行主编通常要做的统稿工作外，还要补缺，因为原提纲有遗漏，不得不补上。

这一工作的难点很多，除一般体例文风不一而外，还要保留他人的观点，特别是白尚恕教授的观点不能随便更动，只能保留。

在书中有些看法存在分歧，如圆周率值3.1416的获得者有人认为是刘徽，有人则主张是祖冲之，并都提出了理由。还有其他某些问题，都是学术界长期争论的问题。本书对此未强求统一看法，都按各自的原貌保留在书内，“冀学者之所裁焉。”

由于我本人的能力所限，虽然尽了很大力量，但是可能还存在某些问题，甚至错误，欢迎大家批评指正。

本卷执笔人分工如下（依执笔次序）：

李迪：第一编第一章、第二章第一节，第二编第一章、第四章和人名索引，全书的统稿和插图的处理。

沈康身：第一编第二章（不包括第一节），第三章。

席振伟：第二编第二章、第三章。

白尚恕：第三编，第四编第一、二、三章，第五编第三章第三节。

刘洁民：第四编第四章。

王荣彬：第五编（不包括第三章第三节）。

李　迪

1996年12月17日

于内蒙古师范大学寓所

中国数学史大系编委会

本卷主编：白尚恕（由李迪代行）

执 笔 人：（以姓氏笔画为序）

王荣彬　白尚恕　刘洁民

李　迪　沈康身　席振伟

目　　录

第　一　编

张衡、赵爽等的学术成就

本编主要讲述《九章算术》成书以后到三国中期的数学发展史。这个时期，《九章算术》在社会上广泛流传，成为人们学习数学和社会实际应用的主要数学著作。《周髀》大约晚于《九章算术》一个半世纪流到官府以外，一般平民得以学习和研究。主要数学家有张衡、刘洪、徐岳、赵爽等，其中以赵爽的成就最为突出。

第一章　张衡等在数学上的贡献

《九章算术》做为国家的专书，保存在国家图书馆和技术经济部门，将其做为计算的依据，但是东汉建立不久就开始有人学习和研究，也就逐渐流向了社会。

第一节　东汉社会与《九章算术》的流传

东汉建立以后，刘秀比较注意文化事业，建武五年（29 年）在洛阳立太学，并亲自去察看，“赐博士弟子各有差”[①]。七年（31

① 《后汉书》卷一上“光武帝纪上”。

年）又下诏，要求各级官员推举贤良、方正。中元元年（56年）建立明堂、灵台、辟雍[①]。灵台是帝王祭天的场所，也是观测天象的天文台。东汉的这座天文台高3丈，有12个门。天文台由太史管理，最高负责人为太史令，“掌天时、星历，凡岁将终，奏新年历”，当然祭祀等也是该机构的职责。太史令以下有太史丞，掌候日月星气，还有42人为待诏，其中14人候星，2人候日，3人候风，12人候气，3人候晷景，7人候钟律，1人为舍人（搞一般事务工作）[②]。东汉的天文研究工作，都是在这个台上进行的。根据分工情况来看，也负责气象观测。

关于田租的规定，在西汉景帝二年时为三十而税一，是很轻的。可是在东汉初年由于多次用兵，把税率提高到十分之一，一下子增加了两倍！但不久刘秀认识到问题的重大，于是在建武六年十二月（公元31年1月左右）下诏恢复旧制。诏说：“顷者师旅未解，用度不足，故行什一之税。今军士屯田，粮储差积。其令郡国收见田租三十税一，如旧制。”[③] 就是说军需通过军队屯田的办法解决，不要使农民过重负担。对于调动农民的积极性，发展生产起了作用。

经过几十年的发展，到汉明帝时虽已是比较繁荣，但他仍特别注意劝农生产。永平十年（67年）四月下诏说：“昔岁五谷丰衍，今兹蚕麦善收，其大赦天下。方盛夏长养之时，荡涤宿恶，以报农功。百姓勉务桑稼，以备灾害。吏敬厥职，无令愆惰。”[④] 不论百姓，或是官员都不要因为连年丰收，而忘记备灾，还是努力生产和加强管理。永平十二年（69年），“天下安平，人无徭役，岁

① 《后汉书》卷一下“光武帝纪下”。
② 《后汉书》卷二五“百官二”及注。
③ 《后汉书》卷一下“光武帝纪下”。
④ 《后汉书》卷二“显宗孝明帝纪”。

比登稔，百姓殷富，粟斛三十，牛羊被野。"[①] 真是一派繁荣景象。

长期失修的汴渠，这时被提到议事日程，永平十二年引见水利专家王景，"问以理水形便"。王景于是"陈其利害"，提出修筑方案，夏天动工，调集数十万士兵上渠，到第二年夏天完成。王景及王吴等受到奖励[②]。这对河南、山东等有关地区的农业发展有很大好处。

东汉在一些制度方面也有考虑，例如放宽盐铁专营，汉和帝章和二年（88 年）下"戊寅[③] 诏"，"罢盐铁之禁，纵民煮铸"，但要交税[④]。到东汉后期，大约根据这次诏书的精神，灵帝光和二年（179 年）由大司农做了关于度、量、衡等规定，刻在铜版上，其文字流传至今。全文如下：

大司农以戊寅诏书，以秋分之日，同度量、均衡石、桷[⑤] 斗桶、正权概，特更为诸州作铜斗、斛、称，依黄钟律历、《九章算术》，以均长短、轻重、大小，以齐其政，令海内都同。光和二年闰月廿三日。大司农曹棱亚、淳于宫，右仓曹朱音、史韩鸿造。[⑥][⑦]

这里特别重要的是把《九章算术》和黄钟律历做为制造度量衡的标准定了下来，只有官书才能有这样的规定。

事实说明，东汉政府对《九章算术》相当重视，在世界上都

---

① 《后汉书》卷二"显宗孝明帝载"。

② 《后汉书》卷七六"王景"。

③ "戊寅"为章和二年四月戊寅日。

④ 《后汉书》卷四"孝和孝殇帝纪"。

⑤ "桷"音决（jué）。方形椽子。这里是指像椽子那样的方形量器。

⑥ 《筠清馆金石记》卷五。

⑦ 引文中的"戊寅诏书"是否即章和二年四月戊寅日，需要讨论。该日到 179 年相隔差不多 100 年，时间太久。过去理解为戊寅年，东汉在 179 年前有两个，即 78 年和 138 年，但该两年都没有相应的诏书。理解为戊寅日是一种新的思路。

是极少见的。但是《九章算术》的流传，始于1世纪，也就是“戊寅诏书”前后。马续就是精通《九章算术》者之一。

马续是东汉初马严（17～98）之子。严最初习武，后来“专心攻典，能通《春秋左氏》，因览百家群言，遂交结英贤，京师大人咸器之”。马严有7个儿子，知名的有马融和马续，马续可能是7人中之第6个，他“七岁能通《论语》，十三明《尚书》，十六治《诗（经）》，博览群籍，善《九章算术》”[①]。这是受家学影响所致，对《九章算术》的研习也是在这种环境中进行的。他父亲马严既然在京城里受到人们的器重，因此他必有更多的机会阅览国家各部门的藏书。根据上引资料，可以判断出，马续“善《九章算术》”是在青年时代，约在公元80年前后。

东汉前期，由班固（32～92）编撰西汉的史书《汉书》，未及完成便死于狱中。未完的部分包括八表和天文志两者。马续完成了天文志部分，现在《汉书》卷二六“天文志”即出于其手。而八表则是由班固的妹妹、女数学家班昭完成的。

班昭，字惠班，博学高才，嫁扶风（今陕西西北部）曹世叔为妻，曹早死。汉和帝诏她到国家图书馆——东观搜集资料，续成八表。这对班昭来说是一个极好地学习和研究天文数学的机会。在宫内产生很大影响，多次被召入宫，“令皇后诸贵人师事焉”。即给皇后等人当老师，号曰“大家”。特别是受到邓皇后的信任，封她的儿子为官内侯，做了高官。马续的弟弟马融从班昭学习已完成部分的《汉书》，这才引起由马续完成“天文志”的编写工作[②]。她精通数学，邓皇后又是一个很爱学习的女人，“从曹大家（班昭）受经书，兼天文、算数”[③]。可以肯定地说，班昭也必研习过

① 《后汉书》卷一四“马援列传”。
② 《后汉书》卷八四“曹世叔妻”。
③ 《后汉书》卷十上“皇后妃上”。

《九章算术》。因为她能自由进人东观看书，教邓皇后的算数很可能就是《九章算术》的某些内容。

第二节 张衡的数学研究

张衡（78～139）字平子，河南南阳人，是中国历史上最著的科学家之一。青少年时代在京师洛阳游学，写了一些文学作品，24岁时为南阳郡主簿，34岁成为京官郎中，38岁升为太史令，这是国家天文历法机构的最高官职。44岁为公车司马令。6年之后又复为太史令，最后升为尚书之职。在两度担任太史令期间，张衡进行了卓有成效的科学研究，制造过指南车等机械，特别是候风地动仪为科学史上的杰作。他还作有浑仪和浑象等天文仪器，在中国天文仪器史上影响深远，后来的有关天文仪器可以说都是在张衡的基础上改进和发展起来的。他作有《灵宪》、《浑仪图注》、《漏水转浑天仪注》、《算罔论》等科学著作。其中《算罔论》被认为是数学著作，但因其早已失传，内容无法确知。张衡研究过《九章算术》则是肯定的。



《九章算术》卷四“少广”第24题是已知球的体积而求其直径，但求法的步骤（公式）很不精确，竟有大于1/6的误差，前已述及。首先注意到这个问题，并试图解决的人为张衡。刘徽在对该题作注时引了张衡的一段话，并对张衡进行了批评：

张衡算又谓立方为质，立圆为浑。衡言质之与中外之浑：六百七十五尺之面开方除之，不足一，谓外浑积二十六也。内浑二十五之面，谓积五尺也。今徽令质言中浑，浑又言质，则二质相与之率，犹衡二浑相与之率也。衡盖亦先二质之率推以言浑之率也。衡又言质六十四之面，浑二十五之面。质复言浑，谓居质八

分之五也。又云：方八之面，圆五之面。圆浑相推，知其复以圆囷为方率，浑为圆率也，失之远矣。衡说之自然，欲协其阴阳奇偶之说而不顾疏密矣。虽有文辞，斯乱道破义，病也。

张衡为了叙述简便，把立方叫做“质”，立圆叫做“浑”。“张衡算”有可能是指张衡《算罔论》，而简称之。

上面的大段文字参考白尚恕的今译[1]解释如下：

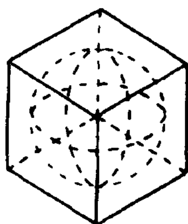


图 1·1·1　立方体及其内浑

张衡认为球的内接立方体与外切立方体的体积关系为：

$$\frac{\text{球外切立方体体积}}{\text{球内接立方体体积}}\approx\frac{d^3}{a^3}\approx\frac{\sqrt{675+1}^{②}}{\sqrt{25}}=\frac{26}{5}。$$

刘徽经计算立方体外接球体积与内切球体积之比也是 26∶5。张衡又提出：立方体体积相当于面积为 64 的（正方形的）边，而内切球体积相当于面积为 25 的（正方形的）边，即

$$\frac{\text{立方体体积}}{\text{内切球体积}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{25}}=\frac{8}{5}。$$

由此推得

$$\text{内切球体积}=\frac{5}{8}\times\text{立方体体积}。$$

张衡又说，正方形面积相当于面积为 8 的边，而其内切圆的面积则相当于面积为 5 的边，即

$$\frac{\text{正方形面积}}{\text{内切圆面积}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}。$$

---

① 白尚恕. 九章算术今译. 济南：山东教育出版社，1990，164～165

② 这个数是经过计算得到的，为简化而略去计算过程。

这就又归到旧术上了，实际还是以圆柱（高与直径相等）为方率，其内切球为圆率，即“以圆囷为方率，浑为圆率”，于是刘徽指出：“失之远矣。”刘徽认为，张衡失误的原因是因为他想协调于阴阳、奇偶之说而不考虑结果是粗疏还是精密了。

张衡的研究结果虽然不可取，可是有两点值得注意：其一是所研究的问题来自《九章算术》，现在尽管没有直接的资料证明这一点，而他研究过《九章算术》则可以肯定。从张衡的地位和工作性质，他看到《九章算术》是顺理成章的。其二是张衡考虑问题的思路对后人有很大启发，对正确解决球的体积与直径的关系开辟了道路。

与上面的问题相联系的还有圆周率问题。上一章已经指出，《九章算术》中的圆周率值为 3，刘歆虽然用过新值，但未写进《九章算术》。张衡在研究球的问题时已注意到这一点。刘徽在注中说：

如按衡术，方周率八之面，圆周率[①] 五之面也。令方周六十四尺之面，即圆周四十尺之面也。又令径一尺，方周四尺，自乘得十六尺之面，是为圆周率一十之面，而径率一之面也。

这段话的意思是：按张衡的算法有

$$\frac{\text{正方形的面积}}{\text{内切圆的面积}}=\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}。$$

若令方周为$\sqrt{64}$，则圆周便是$\sqrt{40}$，即

$$\frac{\text{正方形的面积}}{\text{内切圆的面积}}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{40}}。$$

又假如圆径为 1 尺，则方周就是 4 尺，也可看做方周为$\sqrt{16}$。这时内切圆的周长当为$\sqrt{10}$，而径为$\sqrt{1}=1$。因而有“圆周率一

---

① 此“圆周率”是与“方周率”对应而言的，指两者的比率，而不是圆周率 π。

十之面，而径率一之面”，亦即

$$圆周：直径=\sqrt{10}:\sqrt{1}=\sqrt{10}。$$

也就是说张衡推得了 $\pi=\sqrt{10}$（=3.16）。刘徽说“衡亦以周三径一之率为非是”，同时又指出“增周太多，过其实矣”。不过，还是比 $\pi=3$ 要精密许多。

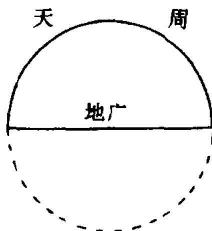


图 1·1·2
“天周地广”图

张衡在天文学研究中也用到了圆周率，他以“日月在径当周天七百三十六分之一，地广一百三十二分之一”。按此而论，天周分母为圆周之率，地广分母为圆径之率，即

$$\frac{1}{736}\Big/\frac{1}{132}=\frac{132}{736}。$$

“以八约之，得周率九十二，径率二十九”[①]，于是有

$$\pi\approx\frac{92}{29}\ (=3.172\cdots)$$

这是张衡的第二个圆周率值。

在张衡的《灵宪》也有圆周率的内容[②]。

第三节　天算家刘洪等的工作

东汉后期由于天文历法的研究，涉及到不少数学问题，天文历法家对数学做出了自己的贡献。其中最有名的是刘洪，以及和他同时代的蔡邕。

刘洪，字元卓，泰山蒙阴（今山东蒙阴）人，汉鲁王之宗室，汉桓帝延熹中（158～166），以校尉应太史征，释郎中，又升为常

① （唐）瞿昙悉达·开元占经卷一。

② 钱宝琮．张衡灵宪中的圆周率问题．《科学史集刊》第一期，1958（1），86～87

山长史，因其父去世，辞官。后又拜郎中，“检东观著作《律历记》，迁谒者，谷城门侯，会稽东都尉”。死在山阳（在今山东济宁市东南一带）太守任上。他精通数学，“当世无偶”。又造《乾象历》，经过十余年考验日月运行，所论都与天象符合①。3世纪的张华（232～300）对刘洪评价说：“洪笃信好学，观乎六艺群书意，以为天文数术，探赜索隐，钩深致远，遂专心锐。”②

刘洪的数学“当世无偶”是人们公认的，蔡邕认为：“先治律历，以筹算为本，天文为验，请太史旧注，考校连年，往往颇有差舛，当有增损，乃可施行，为无穷法。”要做好这件工作，必须请精通数学的刘洪参与才行，“郎中刘洪，密于用算”，于是向朝廷推荐③。刘昭说：“光和中（178～183），议郎蔡邕、郎中刘洪补续《律历志》，邕能著文，清浊钟律，洪能为算，述叙三光。”④

东汉章帝元和二年（85年）开始采用《四分历》，其中有些内容较好，且有创新，可是也存在一些问题。刘洪的工作即与此有关，何承天（370～447）说：“光和中谷城门侯刘洪始悟《四分（历）》于天疏阔……而造《乾象法》，又制《迟疾历》以步月行，方于《太初（历）》、《四分（历）》，转精密矣。”⑤刘洪的工作缘起于对《四分历》的研究，而在所作《乾象历》中，他“多所创新，影响深远，在我国古代历法史上占有极其重要的地位”⑥。此外他还著有《七曜历》，因其早已失传，而不知内容。

---

① 《后汉书》志第二“律历中”，刘昭引《袁山松书》。

② 同上引《博物记》。

③ 《后汉书》志第三“律历下”刘昭注引蔡邕语。

④ 《后汉书》志第三“律历下”。

⑤ 《后汉书》志第三“律历下”，刘昭注引何承天语。

⑥ 陈美东. 刘洪的生平、天文学成就和思想，自然科学史研究. 1986，5（2）：129～142

刘洪有《九章算术》之作①，也早已失传，与本节所谈之官书《九章算术》有何关系已无从得知，但由此可知他必研究过官书《九章算术》。据前面的资料，知刘洪为当时著名数学家，遗憾的是由于著作失传，数学研究成果也遭埋没，只能从他的《乾象历》中窥见一点点。例如对正负数的利用，《四分历》中已有：

强，正；弱，负也。其强弱相减，同名相去，异名从之②。

此即正负数减法法则。"同名相去"，"相去"就是减去，也就是绝对值相减；"异名从之"，"从之"就是相加，也就是一正一负相减时变成绝对值相加。《乾象历》在"求月去极度"时对正负数加减法则有完整的叙述：

强，正；弱，负。强弱相并，同名相从，异名相消；其相减也，同名相消，异名相从。无对互之③。

与《九章算术》的正负术相比较，更清晰一些，容易理解。其中"无对互之"一语与《九章算术》中的"正无入负之"等四句相对应，"无对"和"无入"的含义相同。

刘洪在天文研究中遇到了大量的分数计算，有的相当复杂，例如在交食计算中"后限"为

$$12\frac{3912\frac{1752}{2209}}{7874}$$

日，从半个交点月长度$13\frac{5203}{7874}$日中减去此数得

$$1\frac{1290\frac{457}{2209}}{7874}$$

① 李俨．中国古代数学史料．上海：中国科学图书仪器公司，1954，50页所引原著中有的把书名误为《九京算术》。

② 《后汉书》志第三"律历下"。

③ 《晋书》卷十七"律历中"。

日[①]。当时使用筹算进行计算，不用这种阿拉伯数码，布置出一个繁分数相当麻烦。古人未留下一个实例，也没有文字说明，推测是拆开进行的，把计算结果分散在不同地方记录。

东汉早期的天文学家李梵、苏统等人发现了月亮经一个近点月在近地点时运行速度最快，刘洪则进一步明确地给出了近点月长度的计算方法和数据，且测得月亮经一近点月，近地点向前推进约3.1度。刘洪还测得月亮在一近点月内每日的经行度数，列出表格，表示在近地点后整日数n与共行度数$f(n)$间的对应关系。设$\triangle=f(n+1)-f(n)$，$0<s<1$，则刘洪用下列公式

$$f(n+s)=f(n)+s\triangle$$

计算近点月后$n+s$日时月亮共行度数[②]。这是一个一次内插法公式，后来不少天文学家使用它。

和刘洪同时代的蔡邕（133～192）也对数学有一定研究。他在讨论天文问题时，涉及到了圆周率，“玉衡是八尺……径八尺，周二尺五寸而强”[③]。说明蔡邕知道$\pi>25/8$（$=3.125$）。

东汉末的著名学者郑玄（127～200）也精通数学，对《九章算术》有所研究。他曾从刘洪学习《乾象历》，可以说是刘洪的学生。郑玄字康成，北海高密（今山东高密县一带）人，少年时代便开始学习数学，八九岁能计算乘除，到青年时代更是博览群书，兼精算术[④]。他的学习地点主要是在太学，“通《京氏易》、《公羊春秋》、《三统历》、《九章算术》”，以及《礼记》等书，老师中还有马续的弟弟马融[⑤]。他学习《九章算术》的年代约在150年前后。

---

① 陈美东. 刘洪的生平、天文学成就和思想. 自然科学史研究，1986，5（2）：129～142

② 钱宝琮主编. 中国数学史. 北京：科学出版社，1964，103

③ 《史记》卷一“五帝本纪第一”，唐张守节所作“正义”于“璿玑玉衡”下引。

④ ［梁］刘孝标. 世说新语，卷上之下，引《高士引》。

⑤ 《后汉书》卷三五“张曹郑列传”。

他在注释《周礼》时曾引“九数”的全部名称，而且说是引自郑众，在第二卷已讲过，兹不重述。郑玄还注《中候》、《乾象历》，著《天文七政论》等大量书籍④。

通过上述事实可以看出，《九章算术》在东汉已广为人知，学习和研究数学的人都离不开它，再加上大司农的规定，其地位已完全确立。

第四节　徐岳的数学研究

刘洪的天算工作在东汉末期和三国时代有广泛地影响，他的《乾象历》很多人都在研究。特别是他有一个学生叫徐岳的，不仅是一位天文学家，而且是数学家。

徐岳所处的虽是一个战乱的时代，但数学却有一定发展，尤其是到三国末发展更快，其原因如下：

首先是客观需要，历法改革、机械制造、甚至军事技术等方面都需要数学作为工具。在上面提到的人中，大多研究并精通天文历法，尤其在北方的魏国于黄初中（220～226）由太史令高堂隆、太史丞韩翊以及陈群、董巴、许芝等进行了一次历法大讨论，且持续了好几年。先是高堂隆提出历法改革问题，韩翊改《乾象历》造《黄初历》。但是尚书令陈群认为还需要进行讨论，许芝、孙钦、董巴都参与进来，特别是刘洪的学生徐岳也到场，讲述《乾象历》的各种优点，认为韩翊的《黄初历》不如《乾象历》精密。参加辩论的还有李恩、杨伟。杨伟指出：“今韩翊据刘洪术者，知贵其术，珍其法。而弃其论，背其术，废其言，违其事，是非必使（刘）洪奇妙之式不传来世。”对《黄初历》进行了严厉批评。在辩论还没有结果的时候，因魏文帝去世而搁浅。后来杨伟独立进行研究，到景初元年（237 年）完成《景初历》，上奏魏明帝，并

批准施行[①]。《景初历》是三国时期最好的历法，一直用到魏亡。在四川的蜀汉未造新历法，仍用《四分历》。

在长江以南的吴国很重视《乾象历》，影响很大，阚泽、王蕃都是《乾象历》的研究者和鼓吹者。据记载："吴中书令阚泽受刘洪《乾象法》于东莱徐岳，又加解注。中常侍王蕃以（刘）洪术精妙，用推浑天之理，以制仪象及论，故孙氏（吴）用《乾象历》，至吴亡。"[②]原来阚泽是徐岳的学生，是刘洪的徒孙。

历史上对《乾象历》评价很高："自《黄初（历）》，已后，改作历术，皆斟酌《乾象（历）》所减斗分、朔余、月行阴阳迟疾，以求折衷。（刘）洪术为后代推步之师表。"[③]

刘洪造了《乾象历》，不仅在天文历法和数学方面有所贡献，而且影响和造就了大江南北的一批学者，有郑玄、徐岳、杨伟、阚泽、王蕃等等，赵爽大约也在其中。这些人大都是数学家。实际上天文学研究离不开数学，天文学家又是数学家乃是自然之事。

三国时期的魏人马钧制造了水车，改进了织绫机，吴人葛衡作浑仪，"使地居天中，以机动之，天转而地止，以上应晷度"[④]。诸葛亮"性长于巧思，损益连弩，木牛流马，皆出其意；推演兵法，作八阵图，咸得其要云"。他的木牛流马的构造虽然至今还在讨论，没有得出公认的结论，但是根据记载，有各种部件的尺寸[⑤]。诸葛亮有文集 24 篇，其第五篇为"计算"[⑥]，具体内容为何因未有进一步记载而不明，从篇名可知应是数学，很可能是属于军需、部队编制、阵法等方面的计算问题。

魏对于度量衡有所改变，也与数学有关。

①②③《晋书》卷十七"律历中"。

④《三国志》卷六三"吴书·赵达"注引《晋阳秋》。

⑤⑥《三国志》卷三五"蜀书·诸葛亮"及注。

造纸术发明于汉代，到东汉末和三国时期已相当普及，这给数学的广泛传播和研究，创造了极好的条件。如果说在这之前，数学家画图形用木版和帛，而这时则用纸，有的数学家明确提到了用纸画图便是例证。

数学的发展，除客观需要的推动外，还与数学自身的矛盾有关。官书“周髀”和《九章算术》都是只讲计算步骤，而未说明道理，人们必然产生怀疑，张衡对“开立圆术”的研究就是一例。然而两书中所有的计算步骤，都需要建立它们成立的依据。还有一些常用数据不精确，如“周三径一”（$\pi\approx3$）、“方五斜七”（$\sqrt{2}\approx7/5$）等，前者已早有人不断打破，可是长期无人给出精密度高的值的科学求法。许多名词术语没有说明，更没有把其中的一些做为数学概念而给出定义。所有这些都使人感到疑惑或不满，到一定时候便会有人出来解决这些问题，其代表人物就是赵爽和刘徽。可是为什么这两个人要做这样的工作，这又和当时的思潮以及他们本人的具体情况有关。

在本节所要介绍的数学家中以徐岳最为重要。徐岳，字公河，东莱（今山东半岛东北部）人，生于东汉末，刘洪的学生，三国前半期较为活跃。王朗（？～228）说：“余所与游处，惟东莱徐先生素习《九章》，能为计数。”[①] 即王朗认为自己所交游的人物中只有徐岳精通数学。徐岳在数学方面的著作隋唐时有多种流传，各书记载互有异同，为保持记载原貌，现照录于下：

《隋书》卷三四“经籍三”：《九章算术》2卷［徐岳、甄鸾重述］、《九章算经》29卷［徐岳、甄鸾等撰］、《九章算经》2卷［徐岳注］。

《旧唐书》卷四七“经籍下”：《九章算经》1卷［徐岳撰］、《数术记遗》1卷［徐岳撰、甄鸾注］、《算经要用百法》1卷［徐

① ［宋］李昉．太平御览，卷七五四，引王朗《塞势》。

岳撰]。

《新唐书》卷五九“艺文三”：徐岳《九章算术》9卷、又《算经要用百法》1卷。

《宋史》卷二〇七“艺文六”：甄鸾注徐岳《大衍算术法》1卷、徐岳《术数记遗》1卷。

在上面的目录中，以“九章”命名的书共出现5次，显然不是5部不同的著作，最多不过两三部，有的是重复记载，有的可能是同一书的不同抄本。按照书名来考虑，总共有4种书。其中流传下来的只有《数术记遗》1种。

《数术记遗》现传最早的有南宋嘉定五年（1212年）刊本，题“徐岳撰，汉中郡守、前司隶，臣甄鸾注”。有人根据书中引用有佛经中的语句等内容，认为是甄鸾假托徐岳之名写成的著作，是一部伪书。已有人提出不同意见，主张原著是徐岳所作，后来甄鸾加了详细注释[①]。这里采用后者的看法。

《数术记遗》一开头是讲述徐岳在太山（泰山）拜访刘洪，向刘洪学习数学，而刘洪把自己从天目山（在浙江东部）一“隐者”那里学到的数学知识教给了他。书中主要内容有两项，一为大数记法，一为14种算法。

大数记法为3种进位制，原文是：

黄帝为法，数有十等。及其用也，乃有三焉。十等者，亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载。三等者，谓上、中、下也。其下数者，十十变之，若言十万曰亿，十亿曰兆，十兆曰京也。中数者，万万变之，若言万万曰亿，万万亿曰兆，万万兆曰京也。上数者，数穷则变，若言万万曰亿，亿亿曰兆，兆兆曰京也。从亿至载，终于大衍。下数浅短，计事则不尽。上数宏廓，世不可用。

① 冯立升.《数术记遗》及甄鸾注研究. 呼和浩特：内蒙古师大学报（自然科学版），1989（1）“科学史增刊”：66～71

故其传业，惟以中数耳。

这里讲的“三等数”为“下数”十进，“中数”万万进，“上数”重进。最后一段话是指“三等数”中最适用的是“中数”。徐岳又问：“先生之言上数者数穷则变，既云终于大衍，大衍有限，此何得无穷？”这里，“大衍”出于《周易》：“大衍之数五十，其用四十有九。”意思是说，实际是有穷，怎么能说是无穷呢？刘洪说：“盖未思之耳。数之为用，言重则变，以小兼大，又加循环。循环之理，岂有穷乎？”意思是说，有个“循环之理”，用重进制可以得到任意大的数，直到无穷。

14种计算方法各有名称和简短说明，它们是：

积算。

太一算，太一之行，去来九道。

两仪算，天气下通，地禀四时。

三才算，天地和同，随物变通。

五行算，以生兼生，生变无穷。

八卦算，针刺八方，位阙从天。

九宫算，五行参数，犹如循环。

运筹算，小往大来，运于指掌。

了知算，首唯秉五，腹背两兼。

成数算，春夏生养，冬秋收成。

把头算，以身当五，目视四方。

龟算，春夏秋成，遇冬则停。

珠算，控带四时，经纬三才。

计数，既舍数术，宜从心计。

仅根据每种算法的8个字说明，根本看不懂是什么意思。近

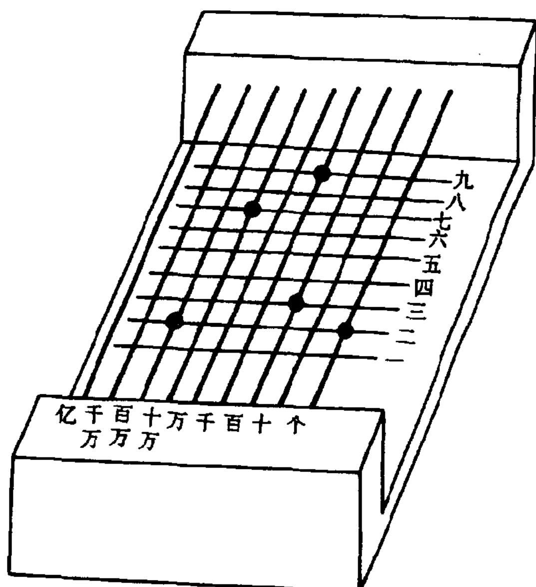


图 1·1·3　“太一算”推想图

些年来，有人根据甄鸾注进行了解释①②。其中约有一半是在算板上或计算工具上进行计算的。现举两例。

太一算：据推测应是如图 1·1·3 所示那样的算具，在算板上刻有九道横线，从下到上标定 1 到 9 九个数，再竖上九根细柱，每根柱上穿一珠，能上下移动，使其停在对应的横线上，就可表示每位上数值的大小，不使珠移到横线上，而留在下端的表示“空位”（零）。图上所示的是 2 709 302。九个珠表示最大的数为“中数”和“上数”的亿，“下数”的垓。至于能做何种运算，书上未讲，实际上能很顺利地进行加减运算。

① 李培业．我国古代的十四种算法，珠算研究，1981 增刊

② 冯立升．《数术记遗》及甄鸾注研究．内蒙古师大学报（自然科学版），1989（1）“科学史增刊”：58～65

珠算：根据甄鸾注文，“珠算”的样式应是如图1·1·4的样子。在一块木板上分成上下三段，上有九个竖柱，每个柱上五个游珠，最上一个是黑色，其余为白色，黑珠一当五，白珠一当一，分别位于上段和下段，中段空着。但是空着的中段甄鸾说是“以空算位”，现在人们的理解多不一致，按字面看应是写上“个”、“十”、“百”等字，可是又说：“其珠游于三方之中”，中段也可以有游珠进入。在下框的每根柱下写数名；进入中段的珠代表各“位”上的数。

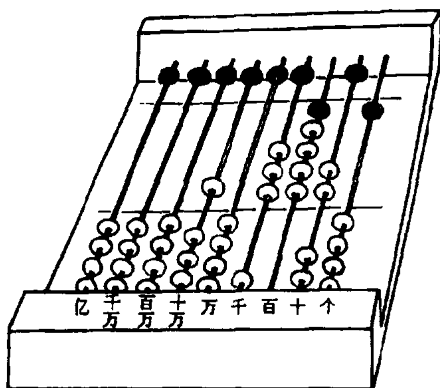


图 1·1·4 “珠算”推想图

这样的“珠算”和后来中间带梁的算盘虽不一致，但也很相像：因而有人认为是中国最早的珠算，刘洪为珠算的发明者；又因刘洪是山东人，所以现在山东把刘洪称做“算圣”。至于如此叫法是否恰当。这里不加评论。

四	九	二
三	五	七
八	一	六

图 1·1·5 “九宫算”图

九宫算：如图1·1·5所示那样。这种数字排列，早在春秋战国时代就已有了，只不过当时没有名称。

总之，徐岳对数学的研究达到了较高的水平，是汉末三国初的重要数学家。

第五节　王粲、赵达、阚泽、陆绩、王蕃等的工作

和徐岳同时代或稍晚还有一批人对数学感兴趣，其中有王粲、赵达、赵爽、阚泽、陆绩、王蕃等，赵爽将在下章做较详细的论述，本节不讲。赵爽以外的这些数学家，虽然没有留下高水平的著作，但是做为一种社会现象，而且前后有连续性，不能不加介绍。

王粲（177～217），字仲宣，山阳高平（在今山东微山县）人。他在少年时代很受学者蔡邕的器重，认为王粲"有异才，吾不如也"，同时把家里的藏书等，提供给他。王粲博学强记，"性善算，作《算术》，略尽其理"[①]。这《算术》早已不复存在，内容也就不得而知了。

赵达，原籍河南（今河南中部一带），后来到了南方，在吴国当参谋官。他"治九宫一算之术，究其微旨"，其"九宫一算"可能就是徐岳的"九宫算"之类的数学问题。

赵达精通数学，自己研究出来的计算方法常常秘不示人，"头乘尾除，一算之法，父子不相语"。他计算能力极强，人们编造出很多离奇的故事，如"使人取小豆数斗，播之席上，立处其数，验复果信"等等。当时阚泽、殷礼等名儒，都亲自拜他为师，求教计数之法，均遭拒绝。还有一位研究天文的官员孙滕多年拜师于他，甚至下跪请求，虽然答应，可是最后还是未成[②]。从这些事实可以看出：赵达是个很神秘的人物，有些事是被夸大和附会了的，不一定真实可靠。另一方面说明，赵达在当时有较大的影响，像

① 《三国志》卷二十一"魏书・王粲"。

② 《三国志》卷六十三"吴书・赵达"。

阚泽这样有学问的人都去拜他为师可以想见一斑。

阚泽（？～243），字德润，会稽山阴（今浙江绍兴）人，吴赤乌五年（242 年）为太子太傅，官位很高。他出身于贫苦农民家庭，穷到买不起竹、笔的程度，常常给人当雇工抄书，在抄的过程中也就把书读完了①。他“追师论讲，究览群籍，兼通历数，由是显名”。前面已经提他拜师的情况②。他除了有前面提到的《乾象历注》外，还研究过《九章算术》。有记载说：“阚泽《九章》曰：粟饭五十，粝饭七十，稗饭五十，粝饭四十八，御饭四十二。”③与《九章算术》所载之“粟米”交换比率不完全相同，不好推测出现这种差别的原因。

前面提到研究《乾象历》的人中还有陆绩和王蕃。陆绩（不知生卒年），字公纪，吴郡吴（今江苏苏州市）人，“博学多识，星历算数无不该览”。他在孙权统治下的吴国做过太守，又领过兵。尽管这样，还是“著述不废，作《浑天图》，注《（周）易》释《（太）玄》，皆传于世”④。他曾设计制造浑象，“形如鸟卵”，对天文学很有研究；在“周天一百七万一千里”的条件下，他认为“天东西南北径三十五万七千”⑤，这里的圆周率为“周三径一”。

王蕃（219～257）字永远，庐江（今安徽省桐城一带）人，“博览多闻，兼通术艺”⑥，“善数术”，是当时著名的浑天家。在研究天文的过程中，用到了不少数学知识。认为陆绩所用圆周率不精密，于是给出了“率周百四十二而径四十五”，因而陆绩所说的“天东西南北径三十五万七千里”，应是“天径三十三万九千四百

---

① 当时一般人无处买书，只能抄书。

② 《三国志》卷五三“吴书·阚泽”。

③ ［唐］徐坚：《初学记》卷二六。

④ 《三国志》卷五七“吴书·陆绩”。

⑤ 《宋书》卷二三“天文一”。

⑥ 《三国志》卷六五“王蕃”。

一里二十二步三尺二寸一分七十一分分之九”。王蕃所用的圆周率为

$$\frac{142}{45}=3.155555\cdots$$

接下去还有王蕃的一段话，涉及到圆周率问题，内容如下。

王蕃以阳城为“地中”，由阳城到日光直射到地面上的点的距离为勾，此点到日的距离为股，而“地中”到日的距离为弦，是天半径。因已知勾、股分别为15 000里、80 000里，用勾股定理，则天径为

$$(2\sqrt{15\ 000^2+80\ 000^2}=)$$

16 2788里61步4尺7寸2分。把天径“以周率乘之，径率约之”，得天周513 687里68步1尺八寸2分[①]。王蕃未说“周率”和“径率”各是多少，经计算仍为$\frac{142}{45}$。

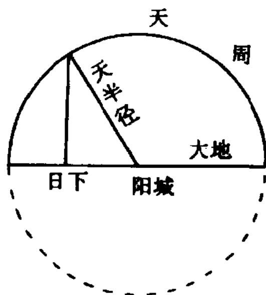


图1·1·6　地中测天

此时期内，还有叫陈炽的也应提及。陈炽，吴人，善《九章》术，与许商、杜忠、王粲并称[②]。后人能把他与许商、杜忠等并列，说明他应有较高的数学水平。

① 《宋书》卷二十二“天文一”。

② 《广韵》卷四“撰第二十九·算”。

第二章 赵爽的生平及学说

赵爽是中国历史上著名的数学家与天文学家，特别是他的数学工作长期受人重视。他所注的《周髀》及为其所作之序是研究他的几乎唯一的史料。本章即主要依据这项史料对赵爽的生平及学说进行简单讨论。

第一节 赵爽的生平及对《周髀》的研究

在本书第一卷第四编第一章对《周髀》已进行了较全面的论述，由于它是官书一般人很难见到，所以从西汉初定稿之后仍一直在政府天文历法机构保存，长在三百三十多年，不见记载。但是在西汉末某些人已经知道该书的某些内容，如书中的盖天说就为扬雄（前53～18）所难，当时不见书名，尚未流传。

《周髀》的出世，是在东汉末期，与蔡邕有关。据记载："汉灵帝时，蔡邕于朔方上书，言'宣夜之学，绝无师法。周髀术数具存，考验天状，多所违失。惟浑天近得其情，今史官候台所用铜仪则其法也。……'"① 这是历史上第一次提到《周髀》，并对其进行了批评。但是从此，《周髀》便为人所知。事实说明，蔡邕对该书进行过研究，否则他无法给予"考验天状，多所违失"的评语。估计当时未必有明确的书名，因书中有"周髀长八尺"，"周髀者何？"等语，"周髀"乃是一种标杆，荣方不知道为什么叫做

① 《晋书》卷十一"天文志上"。

"周髀"，还要请教陈子。"周髀"在很长的时间内应是一种俗称，蔡邕所说的"周髀"可能也是这样。不久，便由俗称演变为书名。赵爽所说"周髀"一词无疑为书名，但不叫《周髀算经》。

在宋刊本《周髀算经》的序署名为"赵君卿"，而在序中又说"爽以暗蔽，才学浅昧"，因此宋代李籍说："君卿，赵爽字也。"[①] 这是可能的。又，"《周髀》一卷，〔赵婴注〕。"[②] 于是清代阮元认为"赵爽，字君卿，一曰名婴"[③] 恐怕"一曰名婴"之说不可靠，很可能是由于两字的字形相近，由"爽"误为"婴"所致。

关于赵爽的生平只能根据他的序给予一些分析。他说"负薪余日，聊观周髀"，"负薪"也是自谦之词，不过他不可能是一位很富有或很有地位的人。另一方面，他又是一位学识渊博的学者，他在序中还提到张衡的《灵宪》，从其《周髀》注的内容来看他知道的事情很多，看过的书也不在少数，如《吕氏春秋》、《尔雅》、《河图括地象》、《考灵曜》、《乾凿度》、《淮南子》、《乾象历》、《易经》等等。

赵爽在注中多次引用《乾象历》。该历系刘洪于东汉末所作，前已述及。由此可知，赵爽的生活年代不会早于《乾象历》之年代。他大约生于汉代末期，而死于三国时代。至于他是何处人氏无任何线索可寻。过去曾因《乾象历》在三国时吴国施用，而认为他是三国吴人。这看法未必可靠。事实上，《乾象历》在北方也广为人知，在上一章已讨论过这一点。因而赵爽的籍贯、活动地区，目前不能确定。

赵爽是中国历史上首次对《周髀》进行认真而全面研究的学者，他的研究包括三个方面的内容：一为文字解释；二为较详细

---

① 〔宋〕李籍．周髀算经音义。

② 《隋书》卷三十四"经籍志三"。

③ 〔清〕阮元．畴人传卷五"赵爽"。

地数学理论推演；三为补图。他在序中说：周髀“其旨约而远，其言曲而中，将恐废替濡滞不通，使谈天者无所取则，辄依经为图，诚冀颓毁重仞之墙，披露堂室之奥。”因此，现传《周髀算经》中之图形均为赵爽所补。有些内容非常精采，将在以下陆续讨论。

在赵爽所写的序和注中反映出他的一些观点和对自然现象的认识，主要的有以下几项：

首先，他认为“夫高而大者莫大于天，厚而广者莫广于地”，在他看来“天”是最高大，“地”是最厚广的，怎样进行研究？他提出了这样的看法：“可以玄象课其进退，然而宏远不可指掌也。可以晷仪验其长短，然其巨阔不可量度也。”前一句的意思是：对于天象可以考察它们的运动，但是因其宏远而不容易了解。后一句的意思是：可以用仪器测量它们的长短，但是因其太广而不能直接度量。中心思想是：天地虽然高厚，不能直接进行探测，然而可以间接进行研究，通过推理和仪器测量能够获得认识。

其次，他对“日兆月”的注释说：“日者阳之精，譬犹火光。月者阴之精，譬犹水光。水则含影，故月光生于日之所照，魄生于日之所蔽。当日即光盈，就日即光尽。月禀日光而成形兆，故云日兆月也。”这就是月本身不发光，因太阳光照射而有光。关于月亮是否发光的问题，主要是由于其盈亏变化而引起人们注意的。最早讲到此事的即《周髀》，在上引之“故日兆月”，接着有“月光乃出，故成明月”，是最早的记载。后来还有人有简单说明，而赵爽的注释更清楚。

第三，对北极地理情况的推理。《周髀》在讲到璿玑径时说：“此阳绝阴彰，故不生万物”，赵爽认为“春秋分谓之阴阳之中，而日所照适至璿玑之径，为阳绝阴彰，故万物不复生也。”但是他对“阳绝阴彰”之说表示怀疑，他在“北极左右，夏有不释之水”下注说：“水冻不解，是以推之。夏至之日外衡之下为冬矣，万物当死。此日远近为冬夏，非阴阳之气。”他还认为北极之下在一年中，

从春分至秋分为昼，从秋分至春分为夜，虽不够精确，但其大意符合实际。

最后，赵爽还对古代历法上的“章”、“蔀”、“经岁”等给予解释。

根据上述各项事实来看，赵爽的知识面较宽，有些认识还比较深刻，结合下面将要讨论的问题，无疑他是3世纪时的大学者。但是由于他是给古书作注，限制住了考虑问题的范围，不能自由发挥。假如他独立写一本自然科学方面的著作，内容肯定会大大丰富，并包括更多的创造性成果。

第二节　治学思想

赵爽是一位善于学习的人，他学习过许多书。但他是否学习过《九章算术》，未明确提及，根据当时的情况看，他肯定学过。《周髀》是以周公向大夫商高请教数学为开端的，赵爽以此展开讨论。商高以善算著称，赵爽认为西周首相周公旦“位居冢宰，德则至圣，尚卑已以自牧，下学而上达，况其凡乎?”“不能自料”，就“访之贤者”。在数学研究上他主张“累思”。他说：“累、重也，若诚能重累思之，则达至微之理。”他要求“言约旨远，问一事而万事达”。赵爽解释“知道”两字说：“引而伸之，触类而长之，天下之能事毕矣，故谓之知道也”。在数学教学方法上，通过注释陈子对荣方在独立思考方面的多次严格要求，他深有体会地说：“凡教之道，不愤不启，不悱不发。愤之，悱之，然后启发……举一隅，使反之以三也。”他自己身体力行：他注释《周髀》的目的是因为此书“约而远，其言曲而中。将恐废替，濡滞不通，使谈天者，无所取则。辄依经为图……披露堂室之奥。”他的注释有文有图，使后学得以读通全书，可以登堂入室。从现传本赵爽注可以看到在插图上他确实下过大功夫。他作过“勾股圆方图”，“日高

图”，“七衡图”以及各式“弦图”等，还用黄、朱、青三种颜色来标记在文字说明中所指不同部位的图形。

第三节　数学用语

从赵爽《周髀》注文可以看到一种有趣而重要的现象。公元3世纪时神州大地兵荒马乱，当时三国鼎立，交通条件、政治条件和物质条件对数学成果交流的限制可以想见。但是从现存文献看，《周髀》赵爽注和《九章算术》刘徽注所用数学用语却非常一致，足证我国数学文化在秦汉时代已颇具规模。特别是由于《九章算术》早已风靡全国，两人住地可能相去千里却使用同一数学术语。我们对两人用语择要列表作一比较。

一、在数量关系方面

用语	赵爽语	刘徽语
等数	更置法实，求等数。	其余，以等数约之。
全	或言一百二十六尺，举其全数。	分母乘全内子。
分	法有分，故以周天乘实	如欲令无分。
齐同	分母不同，则子不齐。当互乘之，以同齐之。	凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同。
通分内子	以四分之一而通分、内子。	以母通之者，分母乘全，内子
约分	以三百约之。	四分之二……，约而言之，则二分之一也。
积分	以经岁积分加大岁积分，……为实。	乘全则散为积分。
率	勾股之率	勾率、股率

（续表）

损益	损者减也，益者加也。	损之曰益，益之曰损。
九九	九九者，乘除之原也。	作九九之术。
实法	实如法而一。	实如法而一。
命	以法命其余，为残分。	以面命之。
开方	开方除之，得其一面。	开方者，求方幂之一面也。
从法	倍股在两边，为从法。	并两步数为从法。

二、在空间形式方面

用语	赵爽语	刘徽语
勾股	勾亦广，广、短也。股亦修，修、长也。	短面曰勾，长面曰股。
结角	共结一角，邪适弦五。	相与结角曰弦。
表	谓用表之宜，测望之法。	立两表，齐高三丈。
重表	定高远者立两表。	度高者重表。
矩	合矩以为方。	今有望深谷，偃矩岸上。
累矩	望景邈者施累矩。	测深者累矩。
参相直	引绳至经纬之交，以望之，星与表绳参相直也。	令后表与前表参相直。
面	开方除之，得其一面。	求方幂之一面也。
黄实	勾股之差自相乘为中黄实。	弦幂自乘，为朱幂四，黄幂一
朱实	勾股相乘为朱实二。	

（续表）

弦实	勾股各自乘，并之为弦实。	勾自乘……，股自乘，合成弦方之幂。
大方	大方之面，勾股并也。	其于大方得四分之一，故开方除之，得高广并数之半。
勾实之矩	勾实之矩以股弦差为广，股弦并为袤。	勾股幂合为弦幂，居里者成方幂，其居表者则成矩幂。……以股弦差为广，股弦并为袤。

第三章　赵爽的工作

赵爽在《周髀》注中专题讨论直角三角形有关性质。一为“勾股圆方图”，一为“日高图”。二者都有注（讨论），俱是传世力作。阮元在《畴人传》中曾予美誉：“勾股圆方图注五百余言耳，而后人数千言不能详者，皆包蕴无遗，精深简括，诚算氏之最也。”阮氏如此评说，可谓恰如其分，为了研究方便起见，先对两注进行标点。

第一节　对“勾股圆方图”与“日高图”赵注之标点

勾股圆方图

勾、股各自乘，并之为弦实。开方除之，即弦。按弦图又可以勾、股相乘为朱实二，倍之为朱实四。以勾股之差自相乘，为中黄实。加差实一，亦成弦实。以差实减弦实，半其余；以差为从法，开方除之，复得勾矣。加差于勾，即股。

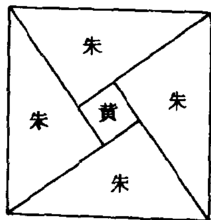


图 1·3·1　弦图

凡并勾、股之实即成弦实。或方于内，或矩于外。形诡而量均，体殊而数齐。勾实之矩以股弦差为广，股弦并为袤。而股实方其里。减矩勾之实于弦实，开其余，即股。倍股在两边为从法，开矩勾之角即股弦差。加股为弦。以差除勾实，得股弦并。以并除勾实，亦得股弦差。令并自乘，与勾实为实。倍并为法。所得亦弦。勾实减并自乘，如法为股。

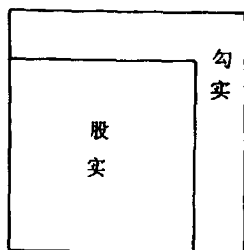


图 1·3·2 弦图二

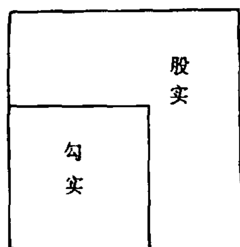


图 1·3·3 弦图三

股实之矩以勾弦差为广，勾弦并为袤。而勾实方其里。减矩股之实于弦实，开其余，即勾。倍勾在两边为从法，开矩股之角即勾弦差。加勾为弦。以差除股实，得勾弦并。以并除股实，亦得勾弦差。令并自乘，与股实为实。倍并为法。所得亦弦。股实减并自乘，如法为勾。

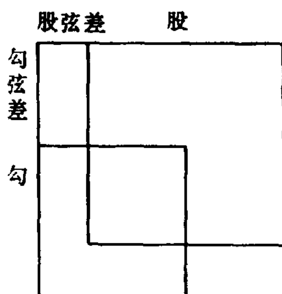


图 1·3·4 弦图四

两差相乘，倍而开之，所得，以股弦差增之，为勾。以勾弦差增之，为股。两差增之，为弦。

倍弦实列勾股差实，见并实者。以图考之，倍弦实满外大方而多黄实。黄实之多，即勾股差实。以差实减之，开其余，得外大方。大方之面，即勾股并也。令并自乘，倍弦实乃减之，开其余，得中黄方。黄方之面，即勾股差。以差减并而半之，为勾。加差于并而半之，为股。

其倍弦为广袤合令勾、股见者自乘为其实。四实以减之，开其余，所得为差。以差减合，半其余，为广。减广于弦，即所求也。观其迭相规矩，共为返复，互与通分，各有所得。然则统叙群伦，宏纪众理，贯幽入微，钩深致远。故曰，其裁制万物，唯所为之也。

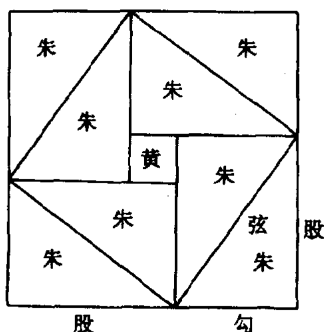


图 1·3·5　并实图

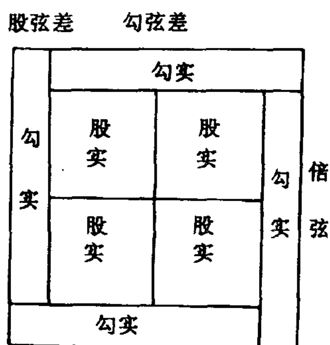


图 1·3·6　倍弦图

日高图

黄甲与黄乙其实正等。以表高乘两表相去为黄甲之实。以影差为黄乙之广而一。所得则变得黄乙之袤，上与日齐。按图当加表高，今言八万里者，从表以上复加之。青丙与青己其实亦等。黄甲与青丙相连，黄乙与青己相连，其实亦等。

《周髀》是今存我国最古的天文学著作。就其数学内容看，主要有三方面：其一，相当复杂的分数乘除运算。其二，计算太阳离人"远近"，用勾股定理。在开方运算中有六位有效数字的答数。其三，测量太阳的"高"、"远"，奠定后世重差术的基础。在有关注释中赵爽对分数及开方的计算只起了验证作用，是《九章算术》有关理论的应用，并无创见。但是他在勾股原理即对于直角三角形边长性质的研究以及某些方程论研究却有突出的成绩。我们对上述二图图注用现代数学语言解释。为归类方便改变了某些命题的前后次序。

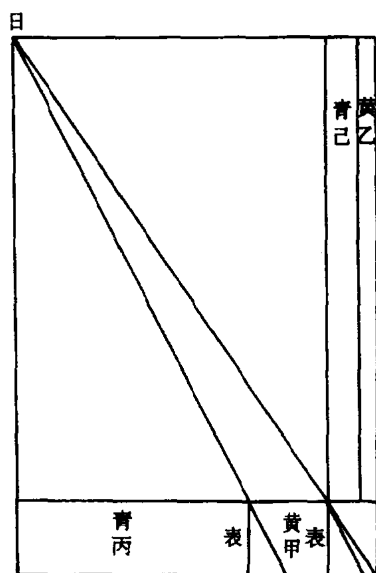


图 1·3·7　日高图

第二节　勾股圆方图注中之命题

第一组

命题 1　“勾、股各自乘，并之为弦实。”

我们记直角三角形勾、股、弦分别为 a、b、c。(图 1·3·8)命题是说：$a^2+b^2=c^2$。

推论　“开方除之，即弦。”

$\sqrt{a^2+b^2}=c$。

证明　“按弦图又可以勾、股相乘为朱实二，倍之为朱实四。以勾股之差自相乘，为中黄实。加差实一，亦成弦实。”

以勾股作为长方形的二边，其面积是朱色直角三角形的二倍。以勾股差为边作中间的黄色正方形。加上四个朱色三角形与弦上

的正方形面积相等。(图1·3·9)

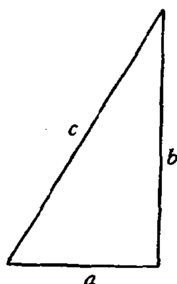


图1·3·8

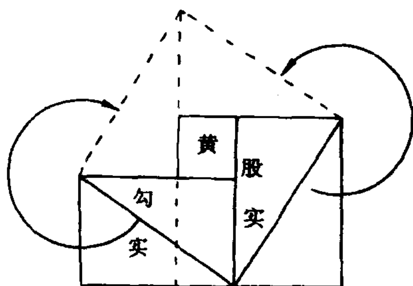


图1·3·9

第二组

命题2　“以差实减弦实，半其余，以差为从法。开方除之，复得勾矣。”

命题3　“加差于勾，即股。”

这是用代数方法解题：“已知c，$b-a$，求a，b。”赵爽认为所求a就是二次方程

$$x^2+(b-a)x=\frac{c^2-(b-a)^2}{2}$$

的根，而$b=a+(b-a)$。“从法”和“实”是我国传统数学自《九章算术》以来分别用以命名形如

$$x^2+Ax=B$$

方程的一次项系数以及常数项。

命题4　“倍股在两边，为从法。开矩勾之角，即股弦差。”

命题5　“加股为弦。”

这是用代数方法解题：“已知a，b，求$c-b$，c。”赵爽认为所求$c-b$是二次方程

$$x^2+2bx=a^2$$

的根，而$c=b+(c-b)$。

命题 6　“倍勾在两边，为从法。开矩股之角，即勾弦差。”

命题 7　“加勾为弦。”

这是命题 4，5 的对偶命题。

第三组

命题 8　“凡并勾、股之实，即成弦实。或方于内，或矩于外。形诡而量均，体殊而数齐。”

这是说弦上正方形是勾、股上正方形面积之和。在弦上正方形内截去股（或勾）上正方形。余下的曲尺形面积等于勾（或股）上正方形。（弦图二）二者形状不同，然而他们的面积却是相等的。

命题 9　“勾实之矩以股弦差为广，股弦并为袤，而股实方其里。减矩勾之实于弦实。开其余，即股。”

这是用算术方法解题：“已知 c，$c+b$，$c-b$，求 b。”所求的 b。（图 1・3・10）

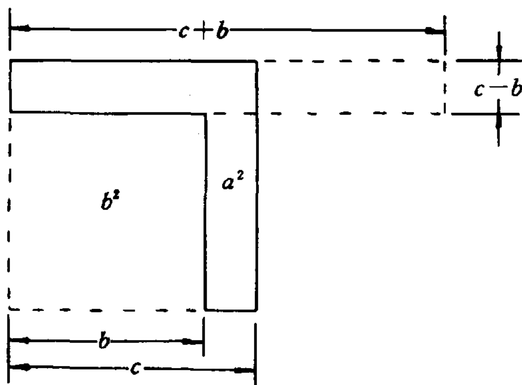


图 1・3・10

$$b=\sqrt{c^2-(c+b)(c-b)}。$$

命题 10　“以差除勾实，得股弦并。”

命题 11　“以并除勾实，亦得股弦差。”

这是借助于命题 9，用算术方法解题："已知 a，$c-b$，求 $c+b$；或已知 a，$c+b$，求 $c-b$。" $b+c=\frac{a^2}{c-b}$，$c-b=\frac{a^2}{c+b}$。《九章算术》勾股章第 6～10，13 问是这一命题的应用。

命题 12　"令并自乘，与勾实为实。倍并为法，所得亦弦。"

有可能赵爽从命题 9：$a^2=(c+b)(c-b)$ 获知二正方形 $(c+b)^2$ 与 a^2 之和是以 $2(c+b)$ 与 c 为边的长方形。

命题 13　"勾实减并自乘，如法为股。"

这是说 $b=\frac{(c+b)^2-a^2}{2(c+b)}$。

同样从命题 9 获知二正方形 $(c+b)^2$ 与 a^2 之差是以 $(c+b)$ 与 $2b$ 为边的长方形。

第四组

命题 14　"股实之矩以勾弦差为广，勾弦并为袤，而勾实方其里。减矩股之实于弦实。开其余，即勾。"（弦图三）

命题 15　"以差除股实，得勾弦并。"

命题 16　"以并除股实，亦得勾弦差。"

命题 17　"令并自乘，与股实为实。倍并为法，所得亦弦。"

命题 18　"股实减并自乘，如法为勾。"

命题 14～18 依次为命题 9～13 的对偶命题。

第五组

命题 19　"两差相乘，倍而开之。所得，以股弦差增之，为勾。"（弦图四）

命题 20　"以勾弦差增之，为股。"

命题 21　"两差增之，为弦。"

在此赵爽为问题："已知 $c-a$，$c-b$，求 a，b，c" 提供算术解法，即

$$a=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+c-b,$$

$$b=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+c-a,$$

而

$$c=\sqrt{2(c-a)(c-b)}+c-a+(c-b)。$$

《九章算术》勾股章第 12 问是这一命题的应用。

第六组

命题 22　“令并自乘，倍弦实乃减之。开其余，得中黄方。”

命题 23　“黄方之面，即勾股差。”

命题 24　“以差减并，而半之，为勾。”

命题 25　“加差于并，而半之，为股。”

在此赵爽为问题：“已知 c，$a+b$，求 a，b” 提供算术解法，

$$(b-a)^2=2c^2-(a+b)^2,$$

$$b-a=\sqrt{2c^2-(a+b)^2},$$

$$a=\frac{b+a-\sqrt{2c^2-(a+b)^2}}{2},$$

$$b=\frac{b+a+\sqrt{2c^2-(a+b)^2}}{2}。$$

证明　“以图考之，倍弦实满外大方而多黄实。黄实之多，即勾股差实。以差实减之。开其余，得外大方。大方之面，即勾股并也。”

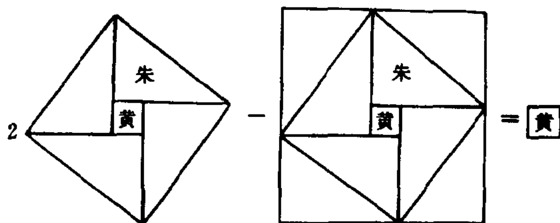


图 1・3・11

这儿，赵爽以出入相补原理证明倍弦实、外大方与黄实之间的面积关系。(并实图，图 1・3・11)《九章算术》勾股章第 11 问

为本命题的应用。

第七组

命题 26 “其倍弦为广袤合。令勾股见者自乘为其实。四实以减之。开其余，所得为差。”

命题 27 “以差减合。半其余，为广。”

命题 28 “减广于倍弦，即所求也。”

这是赵爽用代数方法解题：“已知长方形长宽和是$2c$，面积是a^2，求它的长、宽”赵爽在命题中指出

$$长宽差=\frac{\sqrt{(2c)^2-4a^2}}{2},$$

而所求

$$宽=\frac{2c-\sqrt{(2c)^2-4a^2}}{2},$$

$$长=2c-宽=\frac{2c+\sqrt{(2c)^2-4a^2}}{2}。$$

如果我们把所求长、宽视为二次方程的两根x_1，x_2，那么赵爽命题相当于说，当已知$x_1+x_2=2c$，$x_1x_2=a^2$，所求数为二次方程

$$x^2-2cx+a^2=0$$

的两根，而且根与系数的关系同韦达定理相当①。

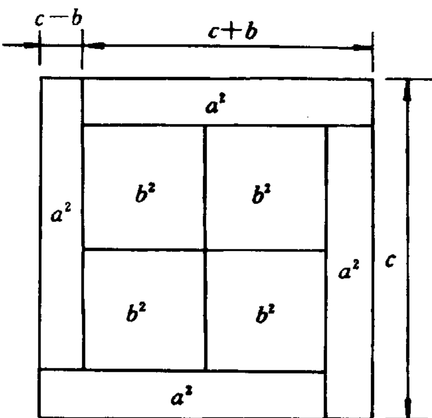


图 1・3・12

清代学者戴震在微波榭本《九章算术》勾股章订讹补图工作中用图证明赵

① 严敦杰・中学数学课程中的中算史材料，北京：人民教育出版社，1957，67

爽第七组命题。大意是说，以弦股和（$c+b$）为长，弦股差为宽作长方形（倍弦图，图 1·3·12）。这长方形的长宽和是 $2c$（倍弦），面积为 a^2（勾自乘为实）。倍弦为边的正方形减去四个实。开方，得倍股，赵爽视之为长方形长与宽的差：$c-b-(c-b)$，于是长方形的宽是 $(2c-2b)/2=c-b$，而其长是 $2c-(c-b)=c+b$。

第三节 日高图注中之命题

赵爽的同代人刘徽于《九章算术》注原序中说："立两表（图 1·3·13 中的 IS，GT）于洛阳之城，令高八尺。南北各尽平地。同日度其正中之景（SD_1，SD_2）。" 在序中确立二公式，未作证明。公式 1 "以影差为法，表高乘表间为实，实如法而一。所得加表高，即日去地也（RK）。这就是

$$RK=\frac{IS\times ST}{TD_2-SD_1}+IS。$$

公式 2 "以南表之影乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也（RS）。" 这是

$$RS=\frac{SD_1\times ST}{TD_2-TD_1}。$$

赵爽在日高图注用出入相补原理提出并证明刘徽公式 1。

命题 1 "黄甲与黄乙其实相等。"

这是说$\square IT=\square OE$。从$\square KD_2$ 及对角线 KD_2 考虑以公共顶点 G 的二余形$\square JT=\square NE$。又从$\square KD_1$ 及对角线 KD_1 考虑以公共顶点 I 的二余形$\square JS=\square LU$。又作 $IU=SD_1=GQ$，$\square NQ$（青己）$=\square LU=\square JS$（青丙）。做一次减法得$\square IT$（黄甲）$=\square OE$（黄乙）。

命题 2 "以表高（IS）乘两表相去（ST）为黄甲之实，以影差（TD_2-SD_1）为黄乙之广而一，所得则变得黄乙之袤（PE）。"

综合命题 1、2 得刘徽公式 1。

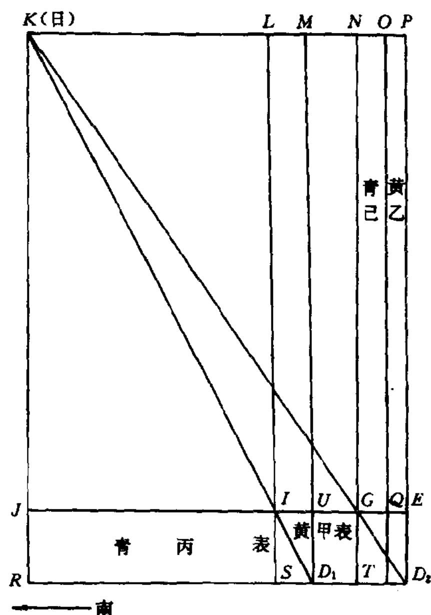


图 1·3·13

这里，从命题1计算二长方形边长，推出日去表顶的距离。

命题3　“按图加表高〔得日去地〕。”

证明　“青丙与青己其实亦等。黄甲与青丙相连，黄乙与青己相连，其实亦等。”

第四节　赵爽刘徽学说的比较

赵爽与刘徽的数学研究很多类似，在数学用语上我们已择要在本编第二章列表揭示。在勾股理论的论述方面两人尤有许多平行之处。这进一步说明远在三国时代中国传统数学已广传华夏南北。

在研究内容上赵爽的勾股圆方图注含命题七组28则如前，其

中绝大部分可以在刘徽的《九章算术》勾股章注中找到，而且命题措词大同小异，例如

赵爽《勾股圆方图注》		《九章算术》勾股章刘徽注
命题 8	凡并勾、股之实，即成弦实。或方于内，或矩于外。形诡而量均，体殊而数齐。	然二幂之数谓倒在于弦幂之中，而可更相表里。居里者成方幂，其居表者则成矩幂。二幂表里形诡而数均。
命题 4	倍股在两边为从法，开矩勾之角，即股弦差。	其矩勾之幂，倍股为从法，开之，亦股弦差。
命题 19	两差相乘，倍而开之，所得，以股弦差增之，为勾。	两差相乘，又倍之，则成黄方之幂。开方除之，得黄方之面……以股弦差加之，即为勾也。
命题 22	令并自乘，倍弦实乃减之，开其余，得中黄方。	其勾股合而自乘之幂，令弦自乘，倍之为两弦幂，以减之。
命题 26	其倍弦为广袤合，令勾股见者自乘为其实。四实以减之。开其余，所得为差。	其倍弦为广袤合，勾自乘为幂，得广，即股弦差。

在讨论方式上两人互有短长，例如赵爽以日高图测日高，因地球面不是平面，兼且表间距过短，日高公式对天体测量失效。刘徽以同一原理施之于测海岛高远则可用。赵爽在勾股圆方图注命题 20 的证明以出入相补原理推导倍弦实、外大方与黄实间的面积关系。对同一课题刘徽所论虽实质与赵爽一致；但与《九章算术》本文却不尽相同。

在钻研深度上赵刘详略不一，正可以互相补充。例如赵爽在勾股圆方图注命题 19 有图无证，而对同一命题刘徽则详作几何推导。刘徽提供的测日高远公式无证，而赵爽在日高图注对公式 1 作了图证。

第二编

中国古代著名数学家刘徽

第一章　刘徽简传

刘徽是中国历史上最杰出的数学家之一，他在数学的各个领域都取得了重要成就。他的数学成就虽已得到国际上的承认，但非常遗憾的是历史上没有留下有关他的详细生平史料，以致我们连他的最基本的履历都不十分清楚。目前只能根据他的著作和一些零星记载，写一简传。本章主要讨论刘徽的生平、思想和对后世的影响。

第一节　有关刘徽的资料

有关刘徽的资料大体有两类，一类是他本人的著作，另一类是零星史料。

流传下来的刘徽著作有两种，即《九章算术》注和《海岛算经》。这两种著作，原来合在一起，后来人们把它分开、各自独立，因此前书有序，而后书没有。刘徽给《九章算术》作注时所写的序就成为研究刘徽的极重要的史料。尽管在前面的两分册中，不时引用过这篇序，不过对本章来说仍有必要全文引录，以便研究、

使用。

昔在包牺氏始画八卦，以通神明之德，以类万物之情，作九九之术以合六爻之变。暨于黄帝神而化之，引而伸之，于是建历纪，协律吕，用稽道原，然后两仪四象精微之气可得而效焉。记称隶首作数，其详未之闻也。按周公制礼而有九数，九数之流，则九章是矣。

往者暴秦焚书，经术散坏。自时厥后，汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌皆以善算命世。苍等因旧文之遗残，各称删补。故校其目则与古或异，而所论者多近语也。

徽幼习《九章》，长再详览。观阴阳之割裂，总算术之根源，探赜之暇，遂悟其意。是以敢竭顽鲁，采其所见，为之作注。事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本干者，知发其一端而已。又所析理以辞，解体用图，庶亦约而能用，通而不黩，览之者思过半矣。且算在六艺，古者以宾兴贤能，教习国子。虽曰九数，其能穷纤入微，探测无方。至于以法相传，亦犹规矩度量可得而共，非特难为也。当今好之者寡，故世虽多通才达学，而未必能综于此耳。

周官大司徒职，夏至日中立八尺之表，其景尺有五寸，谓之地中。说云，南戴日下万五千里。夫云尔者，以术推之。按《九章》立四表望远及因木望山之术，皆端旁互见，无有超邈若斯之类。然则苍等为术尤未足以博尽群数也。徽寻九数有重差之名，原其指趣乃所以施于此也。凡望极高、测绝深而兼知其远者必用重差，勾股则必以重差为率，故曰重差也。立两表于洛阳之城，令高八尺。南北各尽平地，同日度其正中之景[1]，以景差为法，表高乘表间为实，实如法而一，所得加表高，即日去地也。以南表之景乘表间为实，实如法而一，即为从南表至南戴日下也。以南戴

---

① “景”各本讹作“时”，依钱宝琮校改。

日下及日去地为勾、股，为之求弦，即日去人也。以径寸之筒南望日，日满筒空，则定筒之长短以为股率，以筒径为勾率，日去人之数为大股，大股之勾即日径也。虽天圆穷之象犹曰可度，又况泰山之高与江海之广哉。徽以为今之史籍且略举天地之物，考论厥数，载之于志，以阐世术之美。辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于勾股之下。度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入。博物君子，详而览焉。

有理由认为，刘徽还有其他文字流传，直到唐代还存在。否则将会看到，有些事实就不好解释了，就这篇序而言，刘徽十分清楚地交待了，他在原来《九章算术》九卷之后加了一卷，即“辄造重差，并为注解，以究古人之意，缀于勾股之下”，新加的这一卷叫做“重差”。隋代有《九章算术》十卷，“刘徽撰”[①]，这显然是包括“重差”在内的十卷本《九章算术》。但是到唐代却发生了变化，出现了刘徽撰《海岛算经》一卷，而没有刘徽撰十卷本《九章算术》，另有《九章算经》十卷，为“甄鸾撰”[②]。说明唐代，“重差”一卷已从十卷本《九章算术》中分离出来，成为单行本，并取名为《海岛算经》。这件事也可从唐代数学教科书的名称得到旁证。

刘徽说：“析理以辞，解体用图”，就是他在注解《九章算术》时，用“辞”和“图”，“辞”是文辞，即语言文字，“图”是图形。在他的注文中也多次提到图形问题，如“谨按图验”、“按图为位”等，实际上是大量使用了图形，可是奇怪的是，传本《九章算术》连一幅插图也没有，显然是失传了。抄本中都可以保留，且按原来的颜色摹绘。但是，雕版印刷只能一次印一色，四

① 《隋书》卷三十四“经籍志三”。

② 《旧唐书》卷四十七“经籍志下”。

种颜色要套印四次。对数学书来说，绝不会受到如此重视。保存至今的南宋刻本《九章算经》[1]前五卷，是根据北宋元丰刻本而刊刻的，其中没有一幅图形。元丰刻本《九章算经》是第一次雕版印刷的，就是说一开始印刷就未印图形。主持南宋重刻工作的鲍浣之说："其图至唐尤存，今则亡矣。"是元丰刊刻时删去的，还是以前就已失传，需进一步考虑。不过删去的可能性不大，理由是同样刊刻的《周髀算经》中的全部图形都保存下来，不同的颜色改用文字标注，如"黄"、"赤"等，免去了套色的技术难题，当然《九章算术》也可以同样处理。以此推之，宋刻本《九章算经》既然无图形，说明刊刻以前就不存在了。

由上所述，可以大体断定：刘徽注《九章算术》时所绘图形失传于五代。

在一般情况下，一本书的图形有可能失传某几幅，而不会全部都失传！这就提出一个问题：刘徽所画的图形是与注文合在一起，还是图、文分离？可能是后者，即图形单独成册、其中既包括《九章算术》注中的图形，也包括"重差"中的图形。在隋代有一部《九章重差图》一卷，题"刘徽撰"[2]，应即此独立的图册。刘徽以后，学习和研究《九章算术》的人要把图册和书相配合，直到图册失传。

隋代还有一部《鲁史欹器图》一卷，为"仪同刘徽注"[3]。此刘徽是否为本书所讨论的数学家，有不同看法，将在后面论述。

刘徽的著作，能肯定无疑的有三种，即《九章算术》注、《九章重差图》和《海岛算经》，实际上是以《九章算术》为主的一个整体，在唐代分二部为三部。还有一部存疑。

---

① 《九章算经》即《九章算术》，宋代刊刻时采用唐代定的名称，但后来仍称《九章算术》。本书只在提到宋本书时按当时书名，称为《九章算经》。

②③《隋书》卷三十四"经籍志三"。

刘徽给《九章算术》所作之注是研究刘徽的最主要的资料，而且在中国数学史上占有重要地位。刘徽注的特点和重要性在于：第一，不是对《九章算术》中某些字、词进行简单解释，而是对原书中许多不明之处加以说明，有些相当于补充了数学论证。第二，有些注很长，数百字的乃是常事，其中“割圆术”在“晋武库中……”以前部分肯定是他写的注①，文字多达1 500多字，“开立圆术”注的文字也超过1 000字，差不多有1 100字。这些注可以说是一批高水平的数学论文。第三，就现传的文字来看，刘徽注保存的比较完整，但有少部分与后来的注分不太清楚，即刘徽注与他人之注相连接，分界线不明确，因此使研究者产生分歧看法。

刘徽注文有无数失传段落，还不好下断语。后人引用过他的成果，绝大部分都是现传本上的，有极少数的文字例外。下面引录若干段：

“杜夔所用调律尺，比勖新尺得一尺四寸七厘。魏景元四年刘徽注《九章》云：王莽时刘歆斛尺弱于今尺四分五厘，比魏尺其斛深九寸五分五厘；即荀勖所谓今尺长四分半是也。”②

“魏陈留王景四年，刘徽注《九章·商功》曰：‘当今大司农斛，于今尺为深九寸五分五厘，径一尺三寸六分八厘七毫，以徽术计之，于今斛为容九斗七升四合有奇。’魏斛大而尺长，王莽斛小而尺短也。”③

“魏陈留王景元四年，刘徽注《九章》云：王莽时刘歆斛尺，弱于今尺四分五厘，比魏尺其斛深九寸五分五厘。即晋荀勖所云‘杜夔尺长于今尺四分半’是也。”④

“魏陈留王景元四年，刘徽注《九章·商功》曰：‘当今大司

①② 《晋书》卷十六“律历志上·审度”

③ 《晋书》卷十六“律历志上·嘉量”。

④ 《隋书》卷十六“律历志上·审度”。

农斛，圆径一尺三寸五分五厘，深一尺，积一千四百四十一寸十分［寸］之三。王莽铜斛于今尺为深九寸五分五厘、径一尺三寸六分八厘七毫。以徽术计之，于今斛为容九斗七升四合有，'此魏斛大而尺长，王莽斛小而尺短也。"①

上面所引的四条资料大部分皆出于《九章算术》卷五"委粟术"刘徽注，有关段落如下：

"……粟率五，米率三，故米一斛于粟一斛五分之三，菽、荅、麻、麦亦如本率云。故谓此三量器为概，而皆不合于今斛。当今大司农农斛圆径一尺三寸五分五厘，正深一尺。于徽术为积一千四百四十一寸，排成余分，又有十分寸之三。王莽铜斛于今尺为深九寸五分五厘，径一尺三寸六分八厘七毫，以徽术计之，于今斛为容九斗七升四合有奇。"

两相比较发现：基本内容一致，但前引四条均有"魏景元四年"或"魏陈留王景元四年"字样，而传本《九章算术》刘徽注则没有。"景元四年"的来历，推测有两种可能：其一是刘徽所作《九章算术·序》有署名和年代；其二是给统治者"上《九章算术》注表"的年代。也许有其他可能性。不论是哪一种可能，都和《九章算术》一起保存到了唐代，引者正是唐代数学家李淳风，《晋书·律历志》和《隋书·律历志》都由他一人执笔，因此引文的方式和口气完全一致。他所掌握的材料应是第一手的，但是属于哪种可能实难断定，这里倾向于第一种可能。在现传刘徽序中没有刘徽署名，根据内容"徽幼习九章"及宋刊本每卷之前均题有"魏刘徽注"等知序文确为刘徽所撰。是否在李淳风之后，刘徽序在流传过程中失去了署名和作序年代？这是一个未解决的问题，可用刘徽的话"以俟能言者"吧！

就现在所能掌握的有关刘徽的主要资料就是这些，是研究他

① 《隋书》卷十六"律历志上·嘉量"。

的生平和学术思想的重要依据。此外，还有些星星点点的资料，有的也很有价值，将在以下陆续提到。

第二节　刘徽的生活时代

刘徽的生活时代，主要是在三国时期，且在北方的魏国。三国的起算年代为220年，这年冬曹操的儿子曹丕废汉献帝刘协建魏，咸熙二年十二月（相当于公元266年1月）司马炎篡魏建立晋朝，前后46年。因此，刘徽可能出生于汉末，死于晋初。

对于这个结论性看法，需要做些论证。

在第一节中所引之"魏陈留王景元四年"一语中的"景元四年"相当于公元263年，景元是曹魏最末一帝曹奂之年号，起于260年，景元五年五月改元咸熙，二年十二月（266年1月）司马炎称帝后把曹奂封为陈留王，是陈留王在魏亡后才有的。景元四年是刘徽注《九章算术》完成的年代，但因记载中有"注《九章·商功》"之语，故有人认为刘徽注《九章算术》的工作，到景元四年注到"商功"章，以后的四章未注。这样理解是有问题的，因为在所引四条资料中有二条并未题"商功"又当如何理解呢？以常识而论，是李淳风在写书时引了《九章算术》的商功章，有的指明了，有的未指明，就如现代人写书引用他人著作要注明哪年出版，第多少页，总不能理解成该书某年写到第多少页吧？

对于"魏陈留王景元四年"的提法是完全合乎常理的，同样不存在问题。后人写前人，特别是帝王在其死后给予的庙号如太祖、太宗等等，后人往往说唐太宗贞观五年、元世祖至元十六年等，人们从来没有任何怀疑其年代的可靠性。可是曹奂不同，他是被逼下皇帝宝座、逊位为陈留王，而没有庙号，所以只能用陈

留王称呼之。

在《九章算术》注文中有“晋武库中”字样，常引起研究者的兴趣，而且存在分歧看法，有人认为是刘徽写的，有人说不是，下面把它们摘录出来加以分析：

“晋武库中汉时王莽作铜斛，其铭曰：‘律嘉量斛，内方尺而圆其外，庣旁九厘五毫，幂一百六十二寸，积一千六百二十寸，容十斗。’以此术[①]求之，得幂一百六十一寸有奇，此数相近矣。此术微少，而觚差幂六百二十五分寸之一百五。以十二觚之幂以率消息，当取此分寸之三十六，以增于一百九十二觚之幂以为圆幂，三百一十四寸二十五分寸之四。置径自乘之方幂四百寸，令与圆幂通相约，圆率三千九百二十七，方幂得五千。是为率，方幂五千中容圆幂三千九百二十七，圆幂三千九百二十七中容方幂二千五百也。以半径一尺除圆幂三百一十四寸二十五分寸之四，倍之得六尺二寸八分二十五分分[②]之八，即周数也。全径二尺，与周数通相约，径得一千二百五十，周得三千九百二十七，即其相之率。若此者盖尽其纤微矣。举而用之，上法仍约耳。当求一千五百三十六觚之一面，得三千七十二觚之幂，而裁其微分，数亦宜然，重其验耳。”[③]

“……晋武库中有汉时王莽所作铜斛，其篆书字题斛旁云：……。后有赞文，与今《律历志》同，亦魏、晋所常用。”[④]

这两条资料都与刘徽注相连接，但是都突然出现“晋武库中”二段注文。有理由认为这两段注文都不是刘徽所作，现在的问题是作者为谁？从用词和口气来看，作者应为晋亡以后人，而

① “此术”指“晋武库中”之前的注文中有 $\pi\approx\frac{157}{50}$，乃刘徽所得。

② “分”，南宋本等误作“寸”，依钱宝琮校改。

③ 《九章算术》卷一“方田”章“割圆术”注。

④ 《九章算术》卷五“商功”章“圆囷术”注。

不是晋人。刘徽无论如何活不到晋亡，就是到西晋灭亡的 317 年计算刘徽也要活到一百岁以上，再过一百多年东晋才被刘裕所灭，刘徽是绝不可能活到此时的。当代人说当代一般说“今”，如“今武库”，或在朝代名前加“大”字，如“大晋武库”，而不能直呼“晋武库”。这在刘徽注中有例子，如“今尺”、“今斛”以及“当今大司农”等。在前引的第二条资料中，有“亦魏、晋所常用”一语，明明是后人所说，不需分析。

必须进一步加以讨论的是上引第一条资料中包括圆周率 3 927/1 250，这涉及到其获得者为谁的问题。有人说是刘徽，有人说祖冲之。我们认为是后者。正如有人所说的那样：求此圆周率值时所用“以率消息”与割圆术大相径庭[①]。既然此段注文所谈的方法与刘徽方法大不相同，那么就应当顺理成章地承认非刘徽所为。这段文字出于祖冲之，系李淳风加上的。这由紧接着李淳风等所作注释得到证明：

“臣淳风等谨按：旧术求圆，皆以周三径一为率。……刘徽特以为疎，遂乃改张其率。但周径相乘数难契合。徽虽出斯二法[②]，终不能究其纤毫也。祖冲之以为不精，就中更求其数。今者修撰，攈摭诸家，考其是非，冲之为密，故显之于徽术之下，冀学者之所裁焉。”

李淳风这段话的意思是：刘徽认为《九章算术》所用“周三径一”之率十分粗疏，于是推求新率，可是祖冲之认为仍不精密，于是进一步推求，得到了更好的结果。现在把各家的学说搜集在一起，比较它们的疏密，祖冲之的最好，“故显之于徽术之下”，希望学者予以判断。如果说，率 3927/1250 是刘徽所得，那么“显

---

① 李继闵. 东方数学典籍《九章算术》及其刘徽注研究. 西安：陕西人民教育出版社，1990，276

② “出斯二法”系南宋本原文，《大典》本为“出斯一法”。

之于徽术之下”的是什么呢？李淳风并没有举出了。157/50 和 3927/1250 之外的更精密的圆周率值，但正是 3927/1250 在 157/50 之下，说明 3927/1250 的作者是祖冲之，而不是刘徽。

在“晋武库中”以下于 3927/1250 之后还有一句“若此者，盖尽其纤微矣”文，显出作者得意的心情。有人认为这不可能祖冲之语，应是刘徽的。实际上应当是祖冲之的话，因为他得到了比 157/50 更精密的 3927/1250，感到高兴。刘徽虽然对他人的批评比较严厉，但是都很中肯，而对于自己则很谦虚，纵观其全部注文没有发现洋洋自得的语句，这也说明“晋武库”以下一段非刘徽注文。

至于“出斯一法”或“出斯二法”对于那段注文的作者不是刘徽之说不受影响，“出斯二法”也能解释通[①]。

现在的问题是：祖冲之能用“晋武库”一词吗？祖冲之生活于东晋灭亡之后，且他祖父在刘宋朝廷里当大匠卿，这是负责土木工程的官员。政府里另有武库令，掌管军器等物，两个部门虽不相同，但不可能没有关系。祖冲之少年时随他的祖父到武库去，看见王莽时所作铜斛是完全可能的。更可能是，废弃的晋代武库中藏有这种铜斛，祖冲之对其进行测算研究，尤应称其为晋武库，而不是宋武库（当时应呼为今武库）。

“晋武库”以下的一段注文应出自祖冲之《九章算术》注，是李淳风摘抄于该处的，大约也不是原文。这就是李淳风所说的“显之于徽术之下”。另一段“晋武库”注文也是李淳风所加。

刘徽自己把 157/50 做“徽术”或“徽新术”或“新术”，从未在他处提过 3927/1250。如果刘徽在 157/50 之后又求得“盖尽其纤微”的精密值 3927/1250 的话，那他绝不会放弃精密值不管

① 李迪．刘徽传琐考，见：吴文俊主编《刘徽研究》。西安：陕西人民教育出版社，台北：九章出版社，1993，43～62

而回过头来称 157/50 为“新术”。这是刘徽只求得 157/50 而未求得 3927/1250 的有力明证。也是刘徽注《九章算术》完成于魏，没有拖到晋的证据。

刘徽在注中多次提到“今尺”，即杜夔所造调律尺。据记载：“汉末天下大乱，乐工散亡，器法堙没。魏武（曹操）始获杜夔，使定乐器声调。夔依当时尺度，权备典章。”[①] 实际上仍是东汉所用尺。因其为制造乐器、主要用于调整声律，故称调律尺，成为魏的标准尺。杜夔原在刘表（142～208）处，刘表死后其子刘琮于汉建安十三年（208 年）九月投降曹操，夔也随之降曹[②③]。因此，调律尺（魏尺）的出现当在此年之后，刘徽用魏尺注《九章算术》也不会早于 208 年。又，魏黄初元年（220 年）十一月，改大农为大司农[④]，是刘徽注《九章算术》应在此年之后。

晋武帝泰始九年（273 年）荀勖（？～289）制新尺，第二年造成[⑤]，代替了调律尺。由此，又可推得：刘徽完成《九章算术》注当在此年之前。

由 220 年到 273 年的五十多年间，应是刘徽的学术活动时代，他“幼习《九章》，长再详览”就是在这个期间。经过长期反复研读，到魏景元四年（263 年）完成了对《九章算术》的注释工作。

有两条资料虽未说明刘徽是何代人，但是可以肯定其时代。一条是祖冲之所说：“及郑玄、阚泽、王蕃、刘徽，并通数艺，而每多疏舛。”[⑥] 另一条是李淳风讲述前人对圆周率研究时，说道：“自

---

① 引自王国维．莽量考．载《学衡》第 58 期，1926，1～5

② 《三国志》卷一“魏书·武帝纪一”。

③ 《三国志》卷二十九“魏书·杜夔”。

④ 《三国志》卷二“魏书·文帝纪”。

⑤ 《隋书》卷十六“律历志上”。

⑥ 《宋书》卷十三“律历志下”。

刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒，各设新率，未臻折衷"①。这两串人名都是按历史顺序排列的，郑玄、刘歆、张衡三人为汉代人，阚泽、王蕃都是三国时吴人，都精通科学。阚泽死于赤乌六年（243年），被排在王蕃之前，王蕃于吴甘露二年（266年）被杀，年39②。刘徽被排在王蕃之前，又被排在之后，说明他们是同时代人，无次序关系，而刘徽应比王蕃年长、且高龄，这和263年注完《九章算术》的年代相一致。至于皮延宗，为南北朝初期人，在刘徽一百五十多年之后。

在历史上，人们一直都认为刘徽是魏人，隋唐时代有关他的资料尚未散佚，当时的记载有根据。唐初王孝通在"上缉古算术表"中明确说"魏朝刘徽"，李淳风的记述同样如此，前已论及。直到北宋刊印《九章算经》时还著录"魏刘徽注"，这肯定来自唐代"十部算经"抄本，而不是宋人随意加上的。但是，清代中叶四库馆臣因"晋武库"一语而认为"徽入晋之后，又有增损矣。"③此后，就出来刘徽为晋人说，在《四库全书》本等《九章算术》上竟把"魏刘徽注"改为"晋刘徽注"，近人钱宝琮"认为刘徽是魏、晋时人"④，且索性在所校点的《九章算术》上删去了"×刘徽注"四字，因此成了注者不明的注文。

目前，人们一方面承认263年刘徽注《九章算术》，另一方面又对他的生活时代表示怀疑，原因是对"晋武库"两段注文的来历说不清所致。实际上，刘徽为魏人，其工作在魏亡前已完成。

---

① 《隋书》卷十六"律历志上"。

② 《三国志》卷六十五"王蕃"。

③ 《四库全书》系统的各版本《九章算术》前均载有四库馆臣写的提要，有此语。

④ 钱宝琮．九章算术提要，算经十书．北京：中华书局，1963，85

第三节　刘徽的出身与简历

关于刘徽的身世资料可以说很难找到一点确切的，但是通过推理等方法仍能把他勾划出一个大概轮廓来。

刘徽是一位知识渊博的饱学之士，他精通四书五经和诸子，掌握了大量的历史资料，在《九章算术》注中提到的书名有《周礼》、《墨子·号令篇》、《冬官考工记》、《左氏传》、《汉书·律历志》等。他在《九章算术·序》的开头引用了《易经》，但未提书名。接着列举了黄帝、隶首、周公、张苍、耿寿昌等传说人物和周、汉实有人物，而在"商功"章"开立圆术"注中引"张衡算"一段。张衡研究过数学，著有《算罔论》一书，刘徽所说的"张衡算"可能就是《算罔论》，由此可知张衡《算罔论》在三国时代尚未失传，刘徽进行过研究。在序中有"记称隶首作数"，这"记"显然是书名的简称，但无法知其为何书。

《周髀》是刘徽所熟悉和研究过的天文学专著，他虽未提到书名，但是却引用了书中的内容。他在序中有一段话即出自《周髀》，这话是："以径寸之筒南望日，日满筒空，则定筒之长短以为股率，以筒径为勾率，日去人之数为大股，大股之勾即日径也。"而在《周髀》卷上有类似的话："……取竹，空径一寸，长八尺，扑影而视之，空正掩日，而日应空。……以率率之，八十里得径一里，十万里得径千二百五十里。故曰：日径千二百五十里。"两者意思全同，只是刘徽是写在序里，而未详说计算过程罢了。

刘徽在注文中不时提到前人或他人的数学工作，但除前面提到的张衡外，都未点出姓名，也许都是些无名人物或者是一些当时流行的观点而不需指名道姓。下面举些例子。

"方田"第32题"圆田术"注："学者踵古，习其谬失"，"学者"是那些研习《九章算术》的人，都泥守着原来的"周三径

一”之率，而不知改进。

“商功”第10题“方亭”注：“此章有堑堵、阳马，皆合而成立方。盖说算者乃立棋三品，以效高深之积。”其中“说算者”就是当时某些研究数学的人，“立棋三品”是研究立体体积的普遍方法，是指堑堵、阳马、鳖臑三种模型。

“商功”第15题“阳马术”注：“按此术：阳马之形，方锥一隅也。今谓四柱屋隅为阳马。”刘徽所说“今谓”是指当时人们把“四柱屋隅”叫做“阳马”，是建筑上的术语，从《九章算术》以来就已借用到数学上来，成为一种特殊四棱锥的名称。

“商功”第18题“刍甍术”注：“推明义理者：旧说云，凡积刍有上下广曰童，甍谓其屋盖之茨也。”说法来自《书经·梓材》，有对于“茨”的说明：“若作室家，既勤垣墉，惟其涂塈茨”，疏曰：“茨，盖也”，可见是相当古老的，故云“旧说”。

“方程”第18题术注：“其拙于精理徒按本术者，或用算而布毡，方好烦而喜误，曾不知其非，反欲以多为贵。……世人多以方程为难，或尽布算之象在缀正负而已。”这是对当时人们解“方程”上的蔽病的批评。

以上列举了刘徽所提到的“学者”，“说算者”，“今谓”，“旧说”，“拙于精理者”，“世人”等都是指前人或当世人。

刘徽在序中指出：对于数学“当今好之者寡，故虽多通才达学，而未必能综于此者。”在他所处的时代，高水平的数学家的确不多，阚泽、王蕃、徐岳等都不如刘徽。徐岳有《数术记遗》一书，其中虽包括有价值的资料，但与刘徽的《九章算术》注相比差距甚大。只有赵君卿的数学有高水平，可是他们未必能互相了解。因此，刘徽所说的情况基本属实。

刘徽掌握了前人所有的数学成果。不仅如此，而且还采用当时的新技术产品，例如纸就是其中之一。他在画数学图形时全用纸，并涂上不同颜色。

由于刘徽学识渊博，数学成就突出，得到了后人的高度评价和称赞，唐初数学家王孝通是一位很自负的人，对当朝的统治者敢于对自己的著作说："请访能算之人考论得失，如有排其一字，臣欲谢以千金。"[①] 但却赞扬说："魏朝刘徽笃好斯言[②]，博综纤隐，更为之注。徽思极毫芒，触类增长，乃造重差之法，列于终篇。虽即未为司南，然已一时独步。"[③]因王孝通是位大数学家，故他对刘徽的评价具有代表性和权威性。

北宋末期，于大观三年（1108年）在算学从祀70位数学家，加封五等爵，且造像于礼部算学的"两庑"，其中刘徽被封为"淄乡男"。"男"为五等：爵公、侯、伯、子、男中的最后一等，每一位被封者按惯例都加一名称。每人的爵位名基本上符合受封者的籍贯，能查核的都符合实际或有根据。如张衡为"西鄂伯"，西鄂为东汉南阳郡的一个县，张衡生于此。祖冲之为"范阳子"，据记载祖氏为"范阳遒人"，其地在今河北省涞水县北。张邱建为"信成男"，而宋本《张邱建算经》自序题"清河张邱建"，查信成在汉代属清河郡。何承天为"昌虑伯"，本传为"东海郯人"[③]，北魏时昌虑归琅邪郡管辖，与东海郡相邻，而在西晋时昌虑、郯两县均归东海郡。等等。依此推之，刘徽被封为"淄乡男"的"淄乡"也必有一定根据。

近来有人经过考证，认为刘徽可能是"汉菑乡侯后裔"[④]，基本上可以接受。西汉建昭元年（公元前38年）正月封梁王敬子刘就为"菑乡厘侯"，后由"侯喜逢嗣，免。"[⑤] 这是一个很小的侯国，刘喜逢以后就没有了。当然，地名不能消失，这支刘姓后代还要

①③ 王孝通："上缉古算术表"。

② "斯言"指以《九章算术》为代表的数学。

③ 《宋书》卷六十四"何承天传"。

④ 郭书春．汇校《九章算术》，沈阳：辽宁教育出版社．1990，69～71

⑤ 《汉书》卷十五下"王子侯表第三下"。

在那里繁衍。宋金时期，邹平县有个淄乡镇，在此之前的文献中不见记载，但不等于不存在。“淄”与“菑”两字，古代有时相通，故“菑乡”与“淄乡”应为一地。北宋时邹平县属淄州，治所在淄川。以此推之，淄乡镇可能是淄州的一个小镇，即刘徽的原籍。这样看来，封刘徽为“淄乡男”决非偶然。中国的爵位起于周代，当时以所辖地区的大小分为五等，即“周爵五等，而土三等：公、侯百里，伯七十里，子、男五十里。”[①] 淄乡镇充其量不过五十里（平方里），封刘徽为男爵合乎道理，也是有根据的。在封爵时是否还有其他资料，现在尚未查到。今山东淄博市淄川区有个淄城镇[②]，邻近邹平县，是否即宋金时的淄乡镇，不好下断语，但也不应否定。

根据上面的讨论，刘徽可能是菑乡厘侯刘喜逢的后裔，相隔约二百年左右。因而初步推定：刘徽为今山东淄博市淄川人。

刘徽“重差”的第一题为“今有望海岛”，说明他见过海岛，编数学题目时自然会想到海岛的高、远问题。又，淄川距渤海边不过二百多华里[③]，到海边上去很容易。他在序中还有：“又况泰山之高与江海之广哉”之语，说明高、广之大，有比喻的意思，然而也有可能他到过泰山。实际上，泰山到淄川也不远，直线距离不过一百多里，刘徽到泰山脚下并不困难。人们在考虑问题时总是和自己最熟悉的事物，或比较起来较其他类似的事物有直接接触的必首先被考虑。这两点可以做为刘徽是山东淄川人的旁证。

刘徽的籍贯在今山东，三国时属曹魏辖区，就是说刘徽是魏国的原住人，而不是从其他地方跑去的。但是，刘徽的活动地方

---

① [宋] 王存.《元丰九域志》卷一；《金史》卷二十五“地理中”。

② 中华人民共和国民政部行政区划处，全国乡镇地名录．北京：测绘出版社．1986，254～255

③ 淄川距其东北的莱州湾最近，但该处的海岸线在三国时要靠西一些，距离更近。

恐不限于山东，更不可能是在由莱州湾岸到泰山之间的一小块地方。根据他对许多情况的了解，不是一位足不出户的学者，他至少到过魏国的政治重心地区河南尹（今河南省中部）。他在序中有这样的话："立两表于洛阳之城，令高八尺。南北各尽平地，同日度其正中之景。"[①] 洛阳正是处于一块平地上，往南行几十里路才到龙门山。这是刘徽亲身到过洛阳的铁证，而且他在那里进行过天文测量。

东汉的首都本来在洛阳，汉末群雄四起，先后由董卓胁献帝刘协迁都长安，几年之后返回洛阳，复由曹操挟至许昌。曹丕篡汉后又以洛阳为首都。黄初（220～226）中，魏国的太史令高堂隆在洛阳对当时行用的汉代历法进行了讨论。其后，新太史令许芝，召集孙钦、董巴、徐岳、李恩、韩诩等又对历法进行了一次大辩论，场面很激烈。根据辩论的结果，杨伟于景初元年（237年）造《景初历》，表上之[②]，成为魏的一部优秀历法。刘徽去洛阳并在那里进行日影测量，有可能是在这个时候。虽然没有直接证据、只是一种推测，但是不能否定。由于他当时还年轻（估计二十多岁），是不知名的"小人物"，所以没有留下名字。他自己说："徽幼习《九章》，长再详览"，无疑此时已开始学习《九章算术》，并积累了较多的素材，为以后给《九章算术》作注做了准备。所谓"长再详览"，即以平时研究和所掌握的资料"为之作注"，到景元四年（263年）完成，前后经历了二三十年。

刘徽是否做过官呢？历史上没有记载，以理推之他不会是一个平民，但也不是高官。有两说应讨论一下：一为正员郎；一为仪同。前者见于1955年的一篇短文，说刘徽官正员郎，七品小京

① "景"各本均讹作"时"，今依钱宝琮校改。

② 《晋书》卷十七"律历中"。

官[①]，而未提出根据。查《南齐书》“刘休传”说其祖父为刘徽，官正员郎，但上距三国末年超过200年，绝不是我们所研究的刘徽，严敦杰已辨其非[②]。至于后者，还有保留的必要。《隋书·经籍志》记有“《鲁史欹器图》一卷，仪同刘徽注。”有人认为“本志于隋人书，但书官位，不书时代，此刘徽当是隋人。“徽”当作“晖”。刘晖在隋官仪同。”[③]实际上，并非如此。《经籍志》中对各书作者的写法不完全一致，不能以此对作者的注法为标准而判断作者系何代人。因此不能只凭“仪同刘徽注”就根据“但书官位，不书时代”而定刘徽为隋代刘晖之误。仪同之名起于东汉延平元年（106年），三国时魏国又有开府仪同三司之职[④]。仪同之称没有被废除，刘徽官仪同是可能的。

通过以上的讨论，可知刘徽是汉菑乡厘侯的后裔，三国时魏人，263年完成其杰作《九章算术》注（包括他加进去的“重差”一卷），到过洛阳，可能参加过历法讨论和在洛阳进行过日影测量。他还可能做过仪同官，在任上完成《鲁史欹器图》一卷，学识渊博，而且对当时全国数学界有较多的了解。成为我国古代最杰出的数学家之一。十分可惜的是，我们对他的了解实在太少了。

---

① 肖而广．关于圆周率：$\frac{3927}{1250}$作者问题的一点意见．自然科学学报（东北人大）．1995（1）：365～366

② 严敦杰．刘徽简传．科学史集刊，1984（11）：14～20

③《隋书》卷三十四“经籍三”的“校勘记”第23条。北京：中华书局

④《晋书》卷二十四“职官志”。

第二章　刘徽的哲学思想

本章从刘徽对待数学的根本观点上论述他的哲学思想，主要包括刘徽的唯物数学观、数学辩证思想和逻辑思想等三部分。

第一节　刘徽的唯物数学观

中国古代数学史上对于数学来源和作用的认识，刘徽是持唯物观点的代表者。他在《九章算术》注的原序中论及数学之起源时指出：

“昔在庖牺氏始画八卦，以通神明之德，以类万物之情，作九九之术，以合六爻之变。暨于黄帝神而化之，引而伸之，于是建历纪，协律吕，用稽道原，然后两仪四象精微之气可得而效焉。记称隶首作数，其详未之闻也。按周公制礼而有九数，九数之流，则《九章》是矣。”①

刘徽序言中“昔在庖牺氏始画八卦”，出于《系辞》。《易传·系辞》云：

“古者包牺氏之王天下也，仰则观象于天，俯则观法于地，观鸟兽之文，与地之宜，近取诸身，远取诸物，于是始作八卦，以通神明之德，以类万物之情。”②

① 本编第二、三章中《九章算术》及刘徽注引文均依郭书春. 汇校《九章算术》. 沈阳：辽宁教育出版社，1990

② 中国社会科学院编. 中国哲学史资料选辑(先秦之部). 北京：中华书局，1984，566. 引文中“包牺氏”即“庖牺氏”，《释文》：“包，本又作庖”。

《系辞》中这段议论，叙述了八卦制作的途径和方法。简言之，八卦是通过经验直觉，即观物取象而制作的，它是人们“近取诸身，远取诸物”，仰观俯察的结果，亦是人们对天地人三才变化之道的模仿、抽象。显然，刘徽的序言中，明确指出了古代被称为“九九之术”的算学之产生是与八卦之推算有关，而八卦之推算又是人们观天察地的结果。对于将“九数”之原归结为“隶首作数”的传说，刘徽则明确指出“其详未之闻也”。可见，在刘徽思想上，作为算学的“九九之术”来源于观天察地的实践的思想是十分明确的。刘徽序言中的“庖牺氏始画八卦”，意在表明八卦、从而表明“九九之术”产生之远古，而并非宣扬神秘主义。事实上，1977年在我国发现的“斐李岗”文化”遗址表明，伏牺——女娲时代的晚期，正值新旧石器时代的过渡时期。这时，农业的发展推动了天文学的发展，古人从观天察地的实践中建立起八卦体系，后这种八卦体系在《周易》中被记述下来，实际乃是我国科学发展的历史见证。

刘徽对于数学起源认识的唯物观点，更表现在他的“数学树”观念上。他在《九章算术》注序言中论述数学是一株大树的思想时指出：

“事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本干者，知发其一端而已。”

即是说，《九章算术》所述的数学知识，犹如一株枝繁叶茂的大树，知道都发于一端。这个端是什么？他接着指出：

“至于以法相传，亦犹规矩度量可得而共，非特难为也。”

这里，刘徽所说的“规”和“矩”乃是测量和绘图的工具。对此，刘徽之前的典籍已有记载。例如，《尸子》卷下云：“古者倕为规矩准绳，使天下仿焉。”① 《墨子·法仪》云：“百工为方以矩，为

① 百子全书（三）·尸子卷下. 杭州：浙江人民出版社，1984，7

圆以规。”① 又如，《孟子·离娄》曰：“不以规矩，不能成方圆。”②《周髀》曰：“平矩以正绳，偃矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远。”③ 而规、矩的形状，早见于汉武梁祠石室（129 年～147 年）造像：“伏羲手执矩，女娲手执规”④ 之像。刘徽所说的“度”和“量”的意义：度乃是计算长短的标准，量乃是计量多少的器皿。《汉书·律历志》曰：“度者，分、寸、尺、丈、引也，所以度长短也。”“量者，龠、合、升、斗、斛也，所以量多少也。”⑤ 可见，刘徽“数学树”之端指的就是空间形式和数量关系，且两者又是相互联系的。例如，在用矩测物体时，就离不开“度”与“量”。故进一步说，刘徽数学树之端乃是空间形式与数量关系的统一。这种数形统一观，后来在刘徽数学研究的实践中得到了充分的体现。例如，他用广、纵二数乘积及广、袤、高三数乘积分别定义几何量长方形面积和长方体体积，据此证明了《九章算术》中一系列面积、体积公式。进而，他又将几何的原理与方法，成功地应用于诸如整勾股数等代数公式的证明，等等。

刘徽对数学的唯物观点还表现在他在具体工作中的求实精神和对数学研究中附会阴阳奇耦的批判。在《九章算术》成书后，东汉张衡曾探索过有关球体积计算的问题，得到了一个比《九章算术》求积公式（球体积$=\frac{9}{16}$直径^3）更为粗疏的公式：

$$球体积=\frac{5}{8}直径^3。$$

对此，刘徽作了研究。他在少广章开立圆术注中指出：

---

①② 诸子集成. 北京：中华书局 1954，第四册：11；第一册：279

③ 诸子百家丛书·周髀算经. 上海：上海古籍出版社，1990，11

④ 李俨. 中国算学史. 上海：商务印书馆，1936，3～4

⑤ 门岿主编. 中国历代文献精粹大典·科技卷·数学. 上海：学苑出版社，1990，1416

“方八之面，圆五之面，圆浑相推，知其复以圆囷为方率，浑为圆率也，失之远矣。衡说之自然，欲协其阴阳奇耦之说而不顾疏密矣。虽有文辞，斯乱道破义，病也。”
这里，“圆浑”是指球，“圆囷”是指正圆柱，“方八之面，圆五之面”是指正方形及其内切圆的比率是$\sqrt{8}$与$\sqrt{5}$。刘徽指出，张衡方法的实质是取

$$方幂：圆幂=\sqrt{8}：\sqrt{5},$$

而后用类似于《九章算术》作者的方法，推出其体积公式的。具体过程是：

$$球积：圆囷积=圆幂：方幂=\sqrt{5}：\sqrt{8},$$

$$圆囷积：立方积=圆幂：方幂=\sqrt{5}：\sqrt{8},$$

故

$$球积=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}立方积=\frac{5}{8}直径^{3}。$$

为了进一步说明张衡“方八之面，圆五之面”“夫之远矣”。刘徽还用圆周率的反推来加以说明。其思路是：

圆幂=半径×半圆周，方幂=半方×半方周；若取半径=半方=1，则

圆幂：方幂=半圆周：半方周=圆周：方周，这样由张衡之说便得：

方周：圆周=方幂：圆幂=$\sqrt{8}：\sqrt{5}=4：\sqrt{10}$。令径为1，则方周为4，圆周为$\sqrt{10}$，从而得到较为粗疏的圆周率$\pi$的近似值$\sqrt{10}$（≈3.16227766），其值大于$\pi$的准确值，故刘徽断言张衡“方八之面，圆五之面”“夫之远矣”，并指出这是张衡全然不顾数学结论的精密与粗疏而用“阴阳之说”奇耦附会数学的结果，文辞虽好，但犯了反科学的毛病。张衡究竟如何入手，未得其详，但从他关于“且律历、卦候、九宫、风角、数有征效，世莫肯学，

而竞称不占之书"[①]的说法来看，刘徽的批评无疑是中肯的。

在对数学作用的认识上，刘徽既肯定了数学在实践和理论上的作用，又未陷入"万物皆数"的神秘主义泥坑。他在序言中指出：

"且算在六艺，古者以宾兴贤能，教习国子。虽曰九数，其能穷纤入微，探测无方。"

其意是，古时将被称为"九数"的数学作为贵族子弟教育的"六艺之一"，并以至宾之礼广招贤能之士，以教国子九九之术。而这种"九数"的作用，小可以穷尽纤毫之微，大能探测边际无涯之巨。文中"无方"，出于《礼记·内则》："博学无方"，"无方"即"无边无涯"之意。刘徽的这段话，意在阐明数学在理论上的重要作用。对于数学在实际中的应用，刘徽在序言中也指出：

"引而伸之，于是建历纪，协律吕，……"

"虽夫圜穹之象犹曰可度，又况泰山之高与江海之方哉。"

"建历纪"是指数学在制定推测日月运行规律的历法中的应用。"律吕"乃是"六律"、"六吕"的合称，即"十二律"，"协律吕"是指数学在协调乐律上的作用。而"圆穹之象犹曰可度"一句则更唯物地表达了数学在认识自然界方面的重要作用。与此相对照的论述是，南北朝成书的《孙子算经》序言：

"夫算者，天地之经纬，群生之元首，五常之本末，阴阳之父母，星辰之建号，三光之表里，五行之准平，四时之终始，万物之祖宗，六艺之纲纪。"[②]

即数学是从天道到地理，从人事到神祇，从道德到性命无所不能，亦即数学在精神到物质一切事物都有应用。

---

① 后汉书·卷五十九·张衡列传. 北京：中华书局，1965，1912

② 门岿主编. 中国历代文献精粹大典·科技卷·数学. 上海：学苑出版社，1990，1418

刘徽对数学产生及其作用的唯物认识，与古希腊毕达哥拉斯（Pythagoras）学派的数学观和数神秘主义也形成了鲜明的对照。关于毕达哥拉斯学派的数学观，公元前 4 世纪的哲学家第欧根尼·拉尔修（公元前 400～前 325 年）有过一段重要的说法：

“亚历山大在他的《哲学家的师承》中说，他在那些关于毕达哥拉斯的回忆录中发现如下一些信条：万物的本原是单子（monad）或 1（unit），由这个单子产生不定的 2（dyao or two），不定的 2 是从属单子的质料，单子是原因；由单子和不定的 2 产生出各种数目；由各种数目产生出点；由点产生出线；由线产生出平面图形；由平面图形产生出立体图形；由立体图形产生出一切可感觉的物体，产生出可感物体的四种元素：水、火、土、空气；这些元素互相交换就完全变成另一些物体，它们的组合产生出有生命的、精神的、球形的世界。”①

即在毕达哥拉斯学派看来，万物的本原是数，而数是由单子（monad）或 1（unit）产生的。显然，其数学观具有唯心和神秘的性质，将它与刘徽的数学观相比，无疑，刘徽的数学观要深刻得多。

但是，由于中国传统文化是封建宗法制度下的文化，而传统数学作为传统文化的一部分，也不免打上封建宗法的烙印，表现出对圣贤的迷恋和膜拜。圣贤无所不能，无所不知，无论什么都要打上圣贤招牌才有力，这几乎成为共识。刘徽序言中“周公制礼而有九数”的说法，正是这种烙印的一种表现。因此，刘徽的唯物数学观中具有时代的局限性。

① 林夏水．毕达哥拉斯学说的数本说．自然辩证法研究，第 5 卷．1989（6）

第二节　刘徽的数学辩证思想

刘徽的数学辩证思想是刘徽哲学思想的又一重要组成部分。细析刘徽《九章算术》注原序及其他对《九章算术》的全部注文，不难领悟到他如下方面的深刻辩证思想。

一、用阴阳对立双方相反相成的观点观察数学，把握数学

刘徽在序言中阐述自己为《九章算术》作注的背景、目的和思想方法时指出：

“徽幼习《九章》，长再详览。观阴阳之割裂，总算术之根源，探赜之暇，遂悟其意。是以敢竭顽鲁，采其所见，为之作注。”

即刘徽作注的目的是“观阴阳之割裂，总算术之根源”。何谓“阴阳之割裂”？割裂，就是把整体分割成若干部分。《文选》三国魏曹元首《六代论》中“割裂州国，分王子弟”[①]即谓此意。而阴阳，《易传·系辞》云：“一阴一阳之谓道”[②]，《老子》云：“万物负阴而抱阳。”[③]可见，古代贤哲的所谓“阴阳”乃是普遍存在于万物之中的对立双方，其一阴一阳的对立法则，即是事物变化发展的道理，故刘徽的“观阴阳之割裂，总算术之根源”是用阴阳对立双方“相反而相成”[④]的道理来观察算术，总结算术，以探索其根源。

刘徽在序言中表达的思想，在其注文中得到了全面的贯彻。例如，对被开方数与方根、开方与乘方的关系及无理数，刘徽在少广章开方术注文中论述道：

---

① 〔梁〕萧统编，〔唐〕李善注：文选·六代论．北京：中华书局，1977，722

②③　中国社会科学院编．中国哲学史资料选辑（先秦之部）．北京：中华书局，1984，563；635

④ 《老子·二章》中已有“有无相生，难易相成”的说法，至《汉书·艺文志》中便出现了“相反而相成”一语。

“凡开积为方，方之自乘当还复其积分。令不加借算而命分，则常微少；其加借算而命分，则又微多。其数不可得而定。故惟以面命之，为不失耳。譬犹以三除十，以其余为三分之一，而复其数可举。”

这里的“积”是指被开方数；所谓的“方”即指今之“方根”。刘徽的注文，实际是通过“方”与“积”的相反相成关系来给出“方”的定义：“方”者，其自乘等于“积”之数也。这与现代平方根定义为其平方等于被开方数之数，毫无二致。注文中，刘徽还对《九章算术》中“若开之不尽者，为不可开，当以面命之”作了明确的解释认为：这与除之不尽而命分一样，“面”就是开之不尽引进的新数，即今之所谓的无理数。其间的相似性好比 $3\div10=3\frac{1}{3}$，可用乘法还原为 $3\frac{1}{3}\times3=10$。a 开之不尽而命面的新数，也可还原为 $(\text{新数})^2=a$。刘徽对被开方数与方根、开方与乘方关系的这些论述充满了哲学的思辩，从而使其达到了很高的理性境界。

对于正负数，刘徽同样从阴阳对立双方相反相成的观点出发进行论述。他在方程章正负术注文中指出：

“凡正负所以记其同异，使二品互相取而已矣。言负者未必负于少，言正者未必正于多。故每一行之中虽复赤黑异算无伤。”

“今两算得失相反，要令正负以名之。”

前者，刘徽指出了：正与负是相对的，称“负”的未必就是少，称“正”的未必就是多，所以称之为正与负，不过是为了区分具有相反意义的量使它们互相取用而已，故在“方程”的一行中同时改变符号也是于算无妨的。其中“赤黑”算即是算筹颜色的赤与黑，古代用以区分数的正、负，亦即刘徽所说的“正算赤，负算黑”。如果说刘徽的前一句话是从相反意义量的角度上揭示正负数概念的实质的话，那么刘徽的后一句话则是着力于从运算上揭示其相反相成的本质。所谓“得失相反”，意谓增加红筹等于减少同样多

的黑筹，它蕴涵着正负数的运算法则："加正等于减负"，"加负等于减正"。这种运算法则，解决了筹算在"方程"术"无对"时的矛盾。"无对"，即指异名之数相减时，犹如减数无所对应而不能相减，因为筹算中，以负减正，按规则要在若干红筹中取去若干黑筹，是无法实现的。而根据刘徽指出的运算法则，取出黑筹等于添加红筹，这样筹算中的矛盾便得以解决。所以刘徽说："益行减行，当各以其类矣。其异名者，非其类也。非其类者，犹无对也，非所得减也。"①

正是由于刘徽注重从阴阳对立双方的相反相成关系中观察问题，才使他对正负数的认识完全摆脱了以收盈为正、支付为负的具体生活意义而进入到揭示其本质的理性抽象，这种对正负数的认识，如同苏联著名数学史家尤什凯维奇（Юцкевич，А. П.）在《中国学者在数学领域中的成就》中指出的，它"超出了其他国家的科学几世纪之久"②。如比刘徽晚得多的印度婆罗门笈多(Brahmagutpta，598～660年) 当时对负数的认识还仅停留在"负债"等具体生活意义的水平上，甚至16世纪法国数学家韦达(Vieta，F. 1540～1603) 在解方程时还不承认方程的根可取负值。

以上阴阳对立双方相反相成的观点，刘徽还将它贯彻到图形问题的处理上。在他看来，"凡物类形象，不圆则方。"③ 即"圆"与"方"是相割裂的，但又是有联系的。例如，对于平面曲线形，如同圆田术那样，他用直线截割曲线的方法，使"方"不断逼近于"圆"，最后甚至可以达到"与圆周合体而无所失"④的程度，于是，通过"方"就达到了"圆"。对于空间曲面形，他则是采用截

① 《九章算术·方程》正负术刘徽注。

② 〔苏〕尤什凯维奇. 中国学者在数学领域中的成就.（译文）数学进展，V01. 2，No2，1956

③④ 《九章算术·方田》圆田术刘徽注。

面方法，通过探求“圆”与“方”之间的关系来解决。如圆锥与外切方锥，因其侧面都分别是无数条不可再分割的圆与外切正方形积累而成，故圆锥与外切方锥侧面积的比率便等于圆与外切正方形周长的比，即他在方田章宛田术注文中所说的：“若令其中容圆锥，圆锥见幂与方锥见幂，其率犹方幂之与圆幂也。”于是，

$$侧面积_{圆锥}：侧面积_{方锥}=\pi：4,$$

由方锥侧面积他便求得了圆锥侧面积，即通过“方”又达到了“圆”。

对于同一类“方”，他通过出入相补来沟通不同图形之间的联系。如他在勾股章关于勾股定理的证明中指出的：

“勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也，合成弦方之幂。”

该证明，按清人李潢的解释有：

如图2·2·1，分别作出以 a、b、c 为边长的正方形，并进行分割，将朱方中的Ⅰ移至弦方中的Ⅰ′，将青方中的Ⅱ、Ⅲ移至弦方中的Ⅱ′、Ⅲ′，便证得了勾股定理。可见，刘徽对图形处理的方法，无论是“出入相补”，或是“割圆”，或是“截面”，都是出发于从阴阳双方之相反相成的观点观察分析问题的结果。

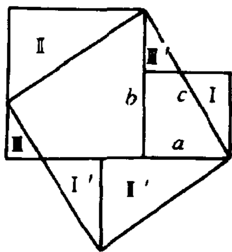


图2·2·1

“方”之出入相补图

二、用“数学树”的有机、整体观念处理数学，用“通而不黩”的灵活、多样方法研究数学

刘徽不仅在理论上认识到数学是一株“枝条虽分而同本干”且“发其一端”的有机大树，而且还具体构建了《九章算术》这株数学大树的理论体系。他通过“采其所见”、“悟其意”正确选择了构建其理论体系的逻辑起点，这就是正负数、率、面积、体积的概念。刘徽从正负数概念出发，发展了“方程

术”，对于面积、体积，他将它们作为基本概念，把长方形面积和长方体体积的计算方法作为基本法则，通过出入相补原理[①]、刘徽原理（对于体积）和以极限思想为基础的无穷小方法来建立其理论。在所有这些逻辑起点中，“率”的概念起着更为基础的作用。

原来，《九章算术》在计算中已使用了率，但面很窄，且含义不统一。刘徽在对率进行界说的基础上，给出了基本性质，建立了齐同术，并在粟米章今有术注文中指出：

“凡九数以为篇名，可以广施诸率，所谓告往而知来，举一隅而三隅反者也。”

即率的应用可以举一反三地延拓至各方面。例如，盈不足问题的模式是：

“今有共买物，人出 a_1（钱），盈 b_1；人出 a_2（钱），不足 b_2。问人数、物价各几何？”

由于出钱数、买物数及盈（或不足）钱数都是成比例变化的一组率，故每人出钱 a_2b_1，买物 b_1，不足 b_2b_1；每人出钱 a_1b_2，买物 b_2，盈 b_1b_2。则在“人出钱 $a_1b_2+a_2b_1$，买物 b_2+b_1”时便“不盈不不足”，故得买一物每人应出钱数为：

$$(a_1b_2+a_2b_1)\ /\ (b_1+b_2)。$$

由此可得人数和物价数。又如，作为“都术”[②]的今有术，它是率的理论通向应用的桥梁。但是，今有术本质上是一种四项比例算法，它源于率的定义和基本性质。因为若设 x_1、y_1 分别为所有率和所求率，x^*、y^* 为所有数和所求数。则据率的性质，由（x_1，y_1）得（1，y_1/x_1）或（x^*，$y_1\cdot x^*/x_1$），故 $y^*=y_1\cdot x^*/x_1$，即为今有术。这些都表明，《九章算术》的数学内容，经过刘徽的思维加工，成为一株枝繁叶茂的有机大树，其思维是整体的，有机

① 吴文俊.《九章算术》与刘徽. 北京：北京师范大学出版社，1982，58～75

② 《九章算术·粟米》今有术刘徽注。

的，系统的，从而也是辩证的。

在研究方法上，刘徽主张采用“通而不黩”[①] 的灵活、多样的方法。他的方法不仅有综合的、分析的，归纳的、演绎的，类比、类推的等逻辑方法，而且还有非逻辑的直觉方法，刘徽还将它们有机结合起来。例如，对于面积，当规定矩形面积为长、宽二度之积时，则根据出入相补原理，容易得到三角形面积法则，由此可以完全建立平面多边形面积理论。据此，容易联想：当规定长方体体积为长、宽、高三度之积时，是否根据出入相补原理可以推得四面体体积法则，并由此建立多面体体积理论？这实际相当于希尔伯特（Hilkert，D.）23 个著名数学问题之一。其答案是否定的，希尔伯特的学生德恩（Dern）成功地证明了这种不可能性，从而表明，四面体体积的任何一种证明，必须使用某种形式的无穷小考察。即必须借助无穷小考察来建立多面体体积理论。刘徽，从他对空间问题的深刻洞察出发，意识到空间与平面的问题是两个有着本质区别的问题，由此他应用极限思想，通过逻辑论证获得了“阳马居二，鳖臑居一，不易之率”[②] 的结论，这就是著名的“刘徽原理”[③]，由这一原理出发，易于得到鳖臑、阳马和四面体的体积求法。这样，多面体体积理论，原则上可奠基于“刘徽原理”和“出入相补”原理之上。刘徽的功绩是十分杰出的。

刘徽的数学辩证思想与《几何原本》形式逻辑的推理方式形成了鲜明的对照，而这完全是由东、西方不同的哲学背景所决定的。

古希腊，在崇尚理念的哲学背景下，数学的发展受到两个因素的制约：一是演绎推理被赋予唯一合法的地位，二是数学被视

① 《九章算术》刘徽注原序。

② 《九章算术·商功》阳马术刘徽注。

③ 吴文俊.《九章算术》与刘徽. 北京：北京师范大学出版社，1982，58～75

为建立统一宇宙图景的工具。由于前者的刺激，演绎推理和几何学得到了充分的发展，后者则不容许数学出现任何疏漏，否则就可能导致全部哲学信念的崩溃。这样，《几何原本》的推理形式又具有艰涩而纡曲的特点。在中国古代，却是另一番情景。它既不存在数学作为建立统一宇宙图景的哲学背景，又不存在演绎推理作为唯一合法地位的思想基础。在中国，数学的发展密切结合着实际问题的解决。又，得天独厚的记数制和计算工具，创造了“一套演绎系统的特殊技术”①，形成了代数方法与几何方法在以计算为主之下的统一。另一方面，我国古代，尤其先秦贤哲具有丰富的类概念，他们的类，不仅摄概念的包含关系，而且具有概念的辩证关系。且他们倡导经验事实与理论推理相结合的方法。所有这些，都为我国古代数学研究中思维的多样性和辩证性提供了客观背景和实际条件。正如李约瑟（J. Needham）所指出的：

“当希腊人和印度人很早就仔细地考虑形式逻辑的时候，中国人则一直倾向于发展辩证逻辑……。与此相应，在希腊人和印度人发展机械原子论的时候，中国人则发展了有机宇宙的哲学。在这些方面，‘西方’是初等的，而中国是高深的。”②

刘徽正是中国数学史上发展辩证逻辑和有机宇宙哲学的代表，他的数学辩证思想，无疑是中国古代辩证思维宝库中的重要一部分。

第三节　刘徽的逻辑思想

刘徽所注的《九章算术》中包含着丰富的逻辑思想，这些思想涉及哲学基本问题上关于思维方面的问题，故它也是刘徽哲学

---

① 汪奠基. 中国逻辑思想史. 上海：上海人民出版社，1979，51

② 〔英〕李约瑟.（中译本）中国科学技术史（第3卷，数学）. 北京：科学出版社，1978，337

思想的重要组成部分。

一、类的思想

类是中国古代逻辑科学的基本概念，是事物间异同的反映和形成概念、作出判断进行推理的根本规定，亦是事物间普遍联系的一种形式。中国古代很早就对类概念有丰富的认识。在阴阳、五行说的代表作《易经》与《洪范》中，已有对世界的最初分类。《易经》的每一卦象代表的就是一个类，五行乃是用五大类来区分客观物质实在。《易传·系辞》涉及类概念的有：

"其称名也小，其取类也大……"①

"方以类聚，物以群分，……"②

"引而伸之，触类而长之，天之能事毕矣，……"③

墨家对类概念的论述更为丰富。《墨经》在阐述同与异时提出了"类"与"不类"，并论述了"异类不吡"的思想原则，指出：

"同，重、体、合、类。"

"同：二名一实，重同也；不外于兼，体同也；俱处于室，合同也；有以同，类同也。"④

"异，二、不体、不合、不类。"

"异：二必异，二也；不连属，不体也；不同所，不合也；不有同，不类也。"⑤

"异类不吡，说在量。"⑥

即《墨经》将"同"分为重、体、合、类，将"异"分为二、不

① 李鼎祚．周易集解·卷十六·系辞．北京：中国书店，1984，(印影本) 2

② 中国社会科学院编．中国哲学史资料选辑(先秦之部)．北京：中华书局，1984，562

③ 南怀瑾等注译．周易今注今译·系辞上．天津：天津古籍出版社，1984，381

④⑤⑥ 《墨子·墨经》．参见：中国社会科学院编．中国哲学史资料选辑（先秦之部）．北京：中华书局，1984，418～419

体、不合、不类。其中，“类同”即指同类事物的相同之点，“不类”即指无相同之点的两物。对于异类的事物，由于它们的量不能相比，故有“异类不吡”的原则。此外，墨家还提出了“以类取，以类予”[①]的思想。“以类取”是指由事物的同一类型选取已知部分作例证，“以类予”是依事物的同一类型推断其未知部分，故“以类取，以类予”实际是演绎与归纳方法的并用。荀子继承和发展了墨家的类概念，他把类看成事物的本质，提出了“辨异而不过，推类而不悖”[②]及“类不悖，虽久同理”[③]的原则。据此，只要事物的分类、归类、推类不发生错误，那么从中得出的一般原理就一定适合该类的一切个别事物。

把类概念用于数学，早在秦汉时期就开始了。《周髀》中载陈子教诲荣方说：

“夫道术，言约而用博者，智类之明。问一类而万事达者，谓子知道。……是故能类以合类，此贤者业精习智之质也。”[④]

这里，“问一类而万事达”、“类以合类”不仅包括同一类事物间的互相推广，还包括了从一类到他类到多类再到合类，最后达到把握高一级类的本质——“道”这样一个归纳过程。《九章算术》按应用对象或数学方法进行分类，每类即为一章，每章中又按不同方法分为更细的类；等等。刘徽正是在这样的基础上继承和发展了前人关于类概念的丰富思想，并将它广泛应用于数学研究，取得了许多创造性成果。这主要包括：

（1）改变了《九章算术》中数学概念不加定义，而仅用默认或约定俗成的方法，出现了建立在类概念基础上的科学定义。

---

① 《墨子·小取》. 参见同上，475

② 诸子集成（二）·荀子集解·正名. 北京：中华书局，1954，281

③ 诸子集成（二）·荀子集解·非相. 北京：中华书局，1954，52

④ 诸子百家丛书·周髀算经. 上海：上海古籍出版社，1990，14

属加种差式的定义是科学定义的基本形式之一，刘徽注中已开始出现了这类定义。例如对“开立方”，刘徽在少广章开立方术中注释道：

“立方适等，求其一面也。”

意谓开立方是在立方体长、宽、高三度相等时，由体积求其棱长的运算。其中，运算是属，而种差是通过三度相等的立方其体积与面的关系来揭示的。它是一种借助事物间的关系作为种差的属加种差式的定义，即关系定义。又如，对幂的定义，刘徽在方田章方田术注中指出：

“凡广纵相乘谓之幂”。

这是个发生性定义。它是把只属于被定义概念，而不属于其他任何事物的发生或形成的特有属性作种差的一种定义。刘徽注中属加种差式的定义还有：

“今两算得失相反，要令正负以名之。”

“（勾股）以御高深广远。……短面曰勾，长面曰股，相与结角曰弦。”①

“凡数相与者谓之率。率者，自相与通。有分则可散，分重叠则约也。等除法实，相与率也。”②

其中，正负数、率的定义是关系性定义。而勾、股、弦定义中，“（勾股）以御高深广远”一语，实际已揭示了勾、股概念的前提是直交的二“面”，它是这两概念的属，“短”、“长”是其种差，“相与结角曰弦”则是弦的发生性定义。刘徽的如上正负数、率、面积等的定义，后来成为他构建《九章算术》数学理论体系的逻辑出发点，可见类概念思想在刘徽《九章算术》注中的基础地位和重要作用。

---

① 《九章算术·勾股》勾股术刘徽注。

② 《九章算术·方田》经分术刘徽注。

（2）对《九章算术》术文的重新分类，使《九章算术》中不同应用对象间数学方法的本质联系及其同一性得到了更为深刻的揭示。

《九章算术》对数学内容和数学方法都进行了分类，这是十分可贵的。但它也有不可忽视的缺点。如对九章的划分，有的按方法分，如方程、勾股、盈不足等；有的按应用分，如方田、粟米、商功等。违背分类标准的同一性，造成某些章内容重复。又，九部分内容和各解法间互相联系不明显，在编排上，囿于儒家的九数顺序，在数学上不尽适宜。刘徽针对《九章算术》中分类的这些缺点加以改进。例如，他对《九章算术》中的术文，按抽象级别的不同重新加以分类，并把今有术看成"都术"。对今有术与诸如经率术、衰分术、返衰术、均输术等的关系，他将它们看成统属与被统属的关系。例如对今有术与衰分术的关系，他在衰分章注中指出：

"衰分，差也。列衰，相与率也。……于今有术，列衰各为所求率，副并为所有率，所分为所有数。"

其意用现代符号表示即是：

所分 A 为所有数，作为一组相关比数的列衰 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为所求率，诸列衰之并数 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 因其副置于列衰之下而称作"副并"为所有率。于是衰分问题便可化为今有术处理。按今有术，其分配结果为：

$$a_i A \Big/ \sum_{i=1}^{n} a_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。$$

故刘徽论证了今有术是较之衰分术属于更高抽象层次上的算法，且它可统括衰分术。

在具体问题的处理上，刘徽将《九章算术》中许多问题的解法都归结为今有术，直接涉及的有百多个问题，其应用遍布九章。例如，衰分章"贷人千钱"问与均输章"取佣负盐"问就是很有

代表的例子。

贷人千钱问："今有贷人千钱，月息三十。今有贷人七百五十钱，九日归之，问息几何？"

取佣负盐问："今有取佣，负盐二斛，行一百里，与钱四十。今负盐一斛七斗三升少半升，行八十里。问与钱几何？"

前一问，刘徽的解法是："以三十日乘千钱为法者，得三万，是为贷人钱三万，一日息三十也。……以九日乘今所贷钱为今一日所有钱，于今有术为所有数；息三十为所求率；三万钱为所有率。"其意是：

所有数＝750 钱×9 日，　　所求率＝30 钱，

所有率＝1000 钱×30 日，

按今有术得

$$\text{所求数（九日归之息）}=\frac{(750\times9)\times30}{1000\times30}=6\frac{3}{4}\text{（钱）。}$$

对后一问，刘徽视

$173\frac{1}{3}$升×80 里为所有数，　40 钱为所求率，

200 升×100 里为所有率，则

$$\text{所求数（与钱数）}=\frac{40\times(173\frac{1}{3}\times80)}{200\times100}=27\frac{11}{15}\text{（钱）。}$$

故刘徽说："衰分章'贷人千钱'与此同"①。

刘徽应用类概念思想，不仅表现在他对《九章算术》术的抽象级别的划分上，还表现在他对不同数学对象中数学方法同一性的揭示。例如，均输章第 20～26 问分别是凫雁、长安至齐、成瓦、矫矢、假田、程耕、五渠共池等不同对象的问题，刘徽在注释中着力指出了它们的共同性。在成瓦、矫矢问的注释中，他论述了

① 《九章算术·均输》取傭问刘徽注。

这两问题与凫雁问题的同一性，指出：成瓦问“此意亦与凫雁同术。牝、牡瓦相并，犹如凫雁日飞相并也。”矫矢问，“同工共作，犹凫、雁共至之类”。对假田、程耕问题，刘徽乃将它们与凫雁问题比较，写道：假田问“齐其钱，同其亩，亦如凫雁术也。”[1] 程耕术，“此犹凫雁术也”[2]。在五渠共池问注释中，他总结以上五个问题的共同性指出：五渠共池术文“犹矫矢之术也”，“自凫雁至此，其为同齐有二术焉，可随率宜也。”这样，刘徽将这不同对象的五个问题解决的同一性揭露无遗。

又如，勾股章的6至10问分别是引葭赴岸、系索、倚木于垣、圆材求径、开门去阃问题，《九章算术》仅给出了各题的具体术，并未揭示它们间的同一性。刘徽从其类概念思想出发，指出了它们都属已知勾及股弦差求股、弦的问题。如圆材求径、引葭赴岸问题是：

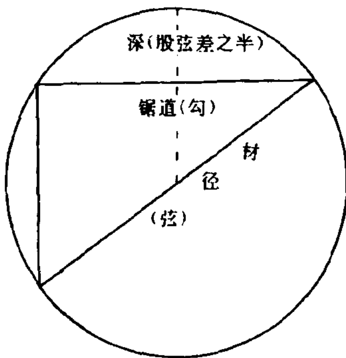


图 2·2·2
圆材求径之勾股模式图

圆材问：“今有圆材埋在壁中，不知大小。以锯锯之，深一寸，锯道长一尺。问径几何？”

引葭问：“今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适与岸齐。问水深、葭长各几何？”

对前一问，《九章算术》的术是：

“半锯道自乘，如深寸而一，以深寸增之，即材径。”

即术文仅给出了具体的计算程序，并未将它上升为勾、股、弦间关系的一般问题。刘徽则明确指出：

---

① 《九章算术·均输》假田问刘徽注。

② 《九章算术·均输》程耕问刘徽注。

“此术以锯道一尺为勾，材径为弦，锯深一寸为股弦差之一半，锯道长是半也。”

亦即他将问题归结为已知锯道＝勾，锯深＝$\frac{1}{2}$股弦差，而求材径＝弦，故

$$\text{弦}=\frac{\text{股弦并}}{2}+\frac{\text{股弦差}}{2}$$

$$=\frac{(\frac{\text{勾}}{2})^2}{\frac{\text{股弦差}}{2}}+\frac{\text{股弦差}}{2}=\frac{(\frac{\text{锯道}}{2})^2}{\text{锯深}}+\text{锯深}$$

$$=\frac{(\frac{10}{2})^2}{1}+1=26\text{（寸）。}$$

对后一问，刘徽指出：“此以池方半之，得五尺为勾，水深为股，葭长为弦。……出水者，股弦差。”即它亦属已知勾及股弦差求股、弦的问题。对其余问题，刘徽更指出了它们间的相互联系，他说：“引而索尽、开门阖者，勾及股弦差同一术”①，倚木于垣“为术之意与系索问同也。”② 即其余三问亦同属已知勾及股弦差求股、弦的问题。

对解法同一性的揭示，除同一章的问题外，对不同章的问题刘徽也十分重视。如《九章算术》中黄金白银问题，在盈不足章中用盈不足术解决，牛羊豕价问题在方程章中用方程术解决。刘徽指出：“盈不足章黄金白银与此相当。‘假令黄金九、白银一十一，称之重适等。交易其一，金轻十三两。问金、银一枚各重几何?’与此同。”③ 亦即应用方程术同样可求解黄金、白银问题，因为它们本属同一类问题，可见刘徽对类概念思想应用之自如。

① 《九章算术·勾股》系索问刘徽注。

② 《九章算术·勾股》倚木问刘徽注。

③ 《九章算术·方程》牛二羊五问刘徽注。

(3)将概念间的关系及其运算规则置于概念分类的基础上，这就使对这些概念的判断、推理纳入了逻辑的轨道。

刘徽对事物认识的一种重要思想是：事物是按其属性来加以分类的，因而类概念便是人们认识事物的重要出发点。在他看来，异类不比，异类的事物只有化为同类后才能加以比较。

例如，对于数，在运算出现相反意义时，他便将它分类为正数、负数，在按“完言之”或“分言之”入算时，便分类为整数、分数。在分数中，他又按不同的分数单位将它分类。在论述分数分类与加减运算的关系时，他指出：

“方以类聚，物以群分。数同类者无远；数异类者无近。远而通体者，虽异位而相从也；近而殊形者，虽同列而相违也。然则齐同之术要矣。”①

所谓“通体”，其意与“殊形”相反，即指有相同的表达形式。刘徽的话意在表明：数量是按其形进行分类的，“通体”之数为同类，“殊形”之数为异类。为了能使分数的加减法普遍施行，必须化异类数为同类数。这种转化的方法便是“齐同”。他还认为，异类数所以可以化为同类数，其原因在于对象仍是同一的，只是分类的标准不同而已。对此，他在合分术注中又指出：

“约而言之者，其分粗；繁而言之者，其分细。虽则粗细有殊，然其实一也。众分错杂，非细不会。乘而散之，所以通之。通之则可并也。”

亦即类属的异与同仅是分割之粗细或表达之繁约而造成的。故在“乘而散之”的变形下，便可达到“齐而同之”的目的。

对于图形，刘徽按其形象将它分类为“圆”与“方”两大类，即他所说的“凡物类形象，不圆则方。”对于“方”的问题，刘徽通过出入相补来解决，而对“圆”的问题，通常将它归结为

---

① 《九章算术·方田》合分术刘徽注。

“方”的问题。归结的方法有“割圆”和“截面”等。

由于刘徽注重了将概念间的关系及其运算规则置于概念分类的基础上，这就使对这些概念的判断、推理纳入了逻辑的轨道。例如，类比、类推法是刘徽经常使用的推理方法，它在刘徽的数学创造中发挥了十分重要的作用。究其原因，全在于刘徽对数学概念的正确分类。完全如同荀子所说的，“类不悖，虽久同理。”即只要事物的分类和归类不发生错误，那么从中得出的一般原理就一定适合该类的一切事物。可见，刘徽类概念思想的重要作用。

二、明“故”思想

刘徽《九章算术》注中明“故”思想是十分突出的。他在序言中明确表达了自己“探赜之暇，遂悟其意”的目的是为了“总算术之根源”。由于《九章算术》记载的202术都未给出合理性证明，故他作注的首要任务就是试图通过“悟其意”来探求《九章算术》中术文的来龙去脉。全部注文，实际就是围绕这一主题展开的。可见刘徽在探求事物的因果关系及其发生、发展规律的思想占有突出的位置。

如同刘徽的类概念思想一样，刘徽的明“故”思想也贯穿于《九章算术》全部刘徽注中。据郭书春统计，刘徽在序言和注文中使用“故”字多达219处。其分布情况如下①：

章	训是以			训 旧	合 计
	定义 推理	议论	合计		
序	1	3	4	0	4
一	33	2	35	0	35
二	7	0	7	0	7
三	7	0	7	0	7

① 郭书春．古代世界数学泰斗刘徽．济南：山东科学技术出版社，1992，274

章	训是以			训　旧	合　计
	定义 推理	议论	合计		
四	12	1	13	1	14
五	34	1	35	0	35
六	30	0	30	1	31
七	34	1	35	1	36
八	19	7	26	0	26
九	23	1	24	0	24
总计	200	16	216	3	219

在如上的219个“故”字中，训“旧”的仅3处，占使用总数不足1.37%，而用于数学定义、推理的训“是以”、“原因”、“理由”的多达200处，占总数91.32%，加上一般议论的16处，共216处，占总数98.63%。刘徽用故（训是以、原因）之多，在我国古籍中是罕见的，完全可与作为中国古代逻辑思想最高成就的《墨子》相媲美，这足见刘徽明“故”逻辑思想之深刻。

（1）用于数学概念、定义中的“故”。

刘徽使用的训“是以”的故字，有一部分用于数学概念的定义。其使用特点是：在对某概念作了界定之后，便称“故曰某某”。如“方程”的定义，他在方程章注云：

“程，课程也。群物总杂，各列有数，总言其实。令每行为率。二物者再程，三物者三程，皆如物数程之。并列为行，故谓之方程。”

这里“故”之前的文字，都是对“方程”意义的界说。其方法是，刘徽先释“程”，后释“方”。“程”与“课”同义，即试验、考核之意。“群物总杂，各列有数，总言其实。令每行为率”就是对每个数量关系进行考核，其结果记录在算板上，得出“物”与“实”间的一组比率。“方”是指等式的外形，刘徽称“二物者再程，三物者三程”表明，“方”乃是“皆如物数程之”的直观表象。

因此，上述定义中“故”之前的文字对“方程”意义的界定是：“方程”是一种筹式方阵，它的每一行为一组列，除下“实”一列外，方阵中的行数等于列数，亦即现代所谓的线性方程组的增广矩阵。

又如，开平方中“定法”的意义，刘徽注释道：

“先得黄甲之面，上下相命，是自乘而除也。倍之者，豫张两面朱幂定袤，以待复除，故曰定法。”①

朱	黄乙
黄　　甲	朱

图 2·2·3

“故”字之前的文字，是对定法的界说。比如，对数 N 开平方，即是求面积为 N 的正方形边长。若边长是两位数，其第一位为 a_1。这时，“先得黄甲之面，上下相命，是自乘而除也”就是指在原正方形中减去以 a_1 为边长的正方形（黄甲）的面积。而当要求第二位数 a_2 时，就要从 $(N-a_1^2)$ 中减去黄乙面积 a_2^2，而且还要减去以黄甲之面为长、黄乙之面为宽的两长方形即两朱幂 $2a_1a_2$，其中 $2a_1$ 是两朱幂的已经确定的长，称为定法。即刘徽“故”字之前的这段话是借助几何意义来界说“定法”这一概念的。

(2) 用于推理中的“故”。

对今有术法则的由来，刘徽在粟米章今有术注中以粟、粝互换为例作了解释。他说：

“少者多之始，一者数之母，故为率者必等之于一。据粟率五、粝率三，是粟五而为一，粝米三而为一也。欲化粟为粝者，粟当先本是一。一者，谓以五约之，令五而为一也。讫，乃以三乘之，令一而为三。如是，则率至于一，以五为三矣。然先除后乘，或

① 《九章算术·少广》开方术刘徽注。

有余分，故术反之。”

上述注文中有二个“故”。第一个故连结的前后文字，其作用是阐明 1 作为数的基本单位的作用和意义。即数是由 1 生成的，1 不仅是构成数的基本单位，也是物物交换的单位。如“粟率五，粝率三”表示“粟五”、“粝三”分别都是一个交换单位。以粟换粝，须先将粟数折算为若干个交换单位（即“1”），故以 5 除之。然后，再将交换单位折算为粝，因而以 3 乘之。这样，通过等价单位的交换，将粟数之 5 化为粝数之 3，即粟数 1 得粝数 3/5。一般地，以粟换粝，实际是先将粟数化为若干个交换的（价值）单位“1”，即所谓“先本是一”得

$$\text{粟数}\div\text{粟率}=\text{若干个（价值）单位，}$$

然后再将交换单位化为粝米数，即

$$\begin{aligned}\text{粝米数}&=\text{交换单位}\times\text{粝率}\\&=(\text{粟数}\div\text{粟率})\times\text{粝率。}\end{aligned}$$

先除后乘可能会有除不尽的情况，因此改为先乘后除而得今有术公式：

$$\text{粝米数}=\frac{\text{粝率}\times\text{粟数}}{\text{粟率}}\text{。}$$

这里，为了表达改先除后乘为先乘后除的原理，刘徽又用了“故”。

刘徽的明“故”思想与以前中国古代的明故、审由的思想传统是分不开的。《墨子》讲“依类明故，推类察故”[①]，孟子讲“苟求其故”[②]，《淮南子》讲“审其所由”[③]，《周易·系辞》讲“探赜

---

① 汪奠基. 中国逻辑思想史. 上海：上海人民出版社，1979，102

② 诸子集成·孟子正义·离娄下. 北京：中华书局，1954，346

③ 淮南子·人间训. 参见：汪奠基. 中国逻辑思想史. 上海：上海人民出版社，1979，218

索隐,钩深致远"[1] 等都是要探求事物间的因果关系和复杂、深奥、玄远的道理及其规律性。刘徽将前人的这些思想创造性地应用于数学中,开创了建立在基本概念、基本原理基础上的演绎论证,从而使"明故"、"审由"等建立在扎实可靠的科学基础上。显然,刘徽的这些思想源于前人,但高于前人。

① 中国社会科学院编. 中国哲学史资料选辑(先秦之部). 北京:中华书局,1984,564

第三章　刘徽的学术思想

本章从刘徽研究数学的基本思想和方法上进行论述，主要涉及对于无穷、理论论证、算法体系、方法论思想及治学思想等方面。

第一节　刘徽的无穷思想

中国古代对于无穷的认识具有悠久的历史传统，在第一卷已有较详细地论述。

刘徽在前人认识的基础上加以发展，第一个将它用于数学的计算和证明，获得了许多创造性成果，这主要包括：

一、积幂成体思想

“积幂成体”是刘徽无穷数学思想的重要组成部分。其意是：立体是无数平面的积累，平面是无数直线的积累，直线是无数点的积累。而这些平面的厚度，直线的宽度，点的长度都是个不可再分量。借用清李善兰的形象语言是：

“为面便可如纸之薄，为线便可如丝之细。故盈尺之书由叠纸而得，盈丈之绢由积丝而成也。”①

这是墨家“不可新”思想的深入发展。因为只有承认线段在无穷分割中存在“不可新”的点，那么这种“不可新”点的无限积累

---

① 李善兰．方圆阐幽．参见：李继闵．东方数学典籍《九章算术》与刘徽注研究．西安：陕西人民教育出版社，1990，325

便可能成为线，进一步线的积累成为面，面的积累成为体。这一思想的直接推论即是截面原理，这是刘徽处理曲面体体积问题的基础和出发点。《九章算术》商功章许多求积术的证明皆出发于这一思想。

例如，《九章算术》商功章指出了“城、垣、堤、沟、堑、渠皆同术”，并给出了公式：

$$\text{城垣积尺}=\frac{\text{上广}+\text{下广}}{2}\times\text{高}\times\text{袤}。$$

城、垣、堤、沟、堑、渠皆是正截面为梯形之直棱柱。刘徽在作注时给出了术的证明。他说：

“损广补狭。……按：此术并上下广而半之者，以盈补虚，得中平之广，以高若深乘之，得一头之立幂。又以袤乘之者，得立实之积，故为积尺。”

上述证明，用到了“以盈补虚”。但刘徽这里的以盈补虚，并非对体积，而是对底面积而言的。对此，刘徽特意在《九章算术》术文“并上、下广而半之”之后，注下了“损广补狭”四字。其目的是，为了“得一头之立幂”，亦即计算出底面积。根据“积幂成体”的思想，柱体是由一些全等的面叠合而成，故当这些面变换为等幂的方形后，则柱体就与由此方形叠成的等高的长方体等积。而长方体之积规定为底面积乘以高，于是柱体的积为立幂“以袤乘之”便是不言而喻的了。

“积幂成体”对于平面图形而言，便是积线成面。刘徽在证明环田术时同样应用了这一思想。环田术刘徽注云：

“此田截而中之周则为长。并而半之者，亦以盈补虚也。”

这里，刘徽是将圆环看成无数同心圆叠积而成。若将这些圆切断后拉直，便可排成一梯形：其上、下底为中、外周，高为径。注文中的“以盈补虚”，便是对梯形的以盈补虚而成为长方形。于是便得环田面积公式：

$$环田面积=\frac{外周+中周}{2}\times径。$$

刘徽“积幂成体”思想和截面原理，并非是无水之源、无本之木。除墨家“不可新”思想影响外，荀子的“夫尽小者大，积微者箸”[①] 的说法无疑亦会有启发。尤为重要的是，《九章算术》中已有这种思想的端倪。如商功章各求积术，圆体的均安排在相应方体之后，即按方堡柱与圆堡柱、方亭与圆亭、方锥与圆锥的顺序排列，且，刍童、冥谷是上、下底为矩形的拟柱体，而曲池则是上、下底为环形的台体，但《九章算术》术文却称“刍童、曲池、盘池、冥谷皆同术”，这预示着截面在处理几何体体积问题中的作用。刘徽以他数学家的敏锐洞察力，将《墨经》、《荀子》和《九章算术》中的这种无穷的哲学思想和数学思想发掘出来，并成功地应用于数学证明中，刘徽的这一工作是前无古人的。

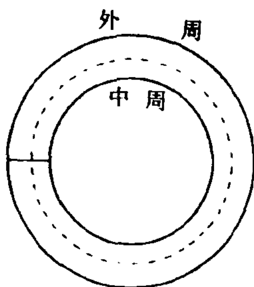


图 2・3・1
积线成面与环田术图

二、无穷小分割思想

刘徽的无穷小分割思想，是中国古代数学园地一枝灿烂的奇葩。他的这一思想集中反映在方田章圆田术注文和商功章阳马术注文中。

以前者为例，《九章算术》圆田术曰：“半周半径相乘得积步。”求圆面积时用 $\pi=3$. 结果很粗疏，刘徽对此进行了批判，并进而创造了论证圆田术的新方法，他在注文中说：

① 诸子集成（二）・荀子・大略. 北京：中华书局，1954，333
箸（zhu），同著，显明。

“又按：为图，以六觚之一面乘半径，因而三之，得十二觚之幂。若又割之，次以十二觚之一面乘半径，因而六之，则得二十四觚之幂。割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”

若用 a_i 表示半径为 R 的圆内接正 i 边形边长，C_i 为周长，S_i 为面积，S 为圆面积。则刘徽从圆内接正六边形开始，逐次割圆的过程为：

割圆为十二觚之幂

$$S_{12}=\frac{C_6}{2}\times R=3(a_6\times R)=(3a_6)R,$$

割圆为二十四觚之幂

$$S_{24}=\frac{C_{12}}{2}\times R=6(a_{12}\times R)=(6a_{12})R,$$

……

割圆为 $6\cdot 2^n$ 觚之幂

$$S_{6\cdot 2^n}=\frac{1}{2}C_{6\cdot 2^{n-1}}\times R=6\cdot 2^{n-2}\cdot(a_{6\cdot 2^{n-1}}\times R)$$

$$=(6\cdot 2^{n-2}\cdot a_{6\cdot 2^{n-1}})R \quad (n=1,2,\cdots)。$$

对这样的割圆过程，注文中刘徽明确指出：“割之弥细，所失弥少。”即分点数越多，则圆与正多边形面积之差 $\sigma_n=S-S_{6\cdot 2^n}$ 就越小。同时，“割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”即割之过程可以不断进行下去，直至最后达到与圆周合体的程度。由于每次割圆拼方时，要由两个等形拼合成一个长为半径、宽为觚面的长方形，所以觚幂应为：宽为半径、长为半觚周的长方形面积。故当分割至细而与圆无所失时，该长方形宽伸展为圆半径，长为圆之半周，从而便得“以半周乘半径而为圆幂”的圆面积公式。

上述证明中，刘徽实际是将圆看成边数为无限的正多边形，这种正多边形的边退缩成为点，其边长是个既为零又为非零的无穷

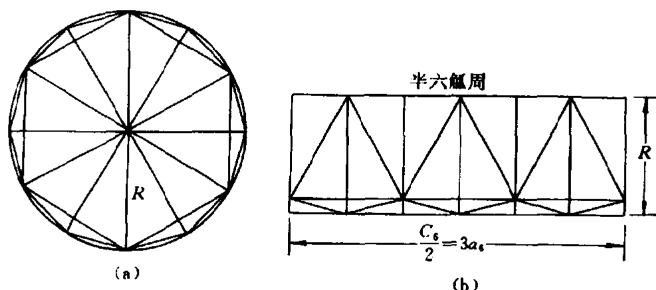


图 2・3・2　割圆为十二觚幂图

小量，整个圆田求积过程类似于微积分孕育时期的面积元素法，无限小的直线形替代无限小的曲线形，其面积作为面积元素，求其和相当于求这些面积元素的积分，而积分的求得凭借的却正是微积分真正基础的极限之思想和方法。从对无穷认识的考察而言，刘徽的极限思想中体现的是潜在无穷和实在无穷的统一，是过程和终结的统一。同时亦体现了“从有限中找到无限，从暂时中找到永久，并且使之确定起来”[①] 的思想。与此相对照的是古希腊阿基米德（Archimedes，前 287～前 212）的求积方法，表面上似乎类同于刘徽，但实际上，他所用的方法是双归谬法，本质上并非涉及极限过程。

阿基米德方法的核心是《几何原本》卷 10 命题 1：

“从一个量中减去大于其半的量，再从余量中减去大于该余量一半的量，如此继续下去，总可以使最后的余量小于已知的任何小量。”

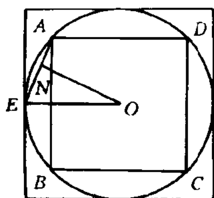
由于阿基米德出色地运用这一命题解决了许多复杂的面积、体积问题，现在就把它的等价形式称为阿基米德连续公理[②]。

阿基米德求积的要点是：

---

① 恩格斯. 自然辩证法. 北京：人民出版社，1971，212

② D. 希尔伯特. 几何基础（中译本，一分册）。北京：科学出版社，1958，68



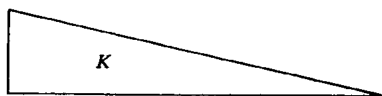


图 2·3·3　阿基米德之双归谬法图

设⊙O是给定的圆，又有一直角三角形K，其长的直角边为圆周长，另一直角边为圆的半径。若圆与图形K面积不等，则它必大于或小于K。先设它大于K的面积。作圆内接正方形$ABCD$，从而等分$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CD}$和$\overset{\frown}{DA}$，然后再等分这些弧，如此继续下去。直至得到这样一个多边形，使圆与它面积之间的差（若干个全等的小弓形的面积），比圆的面积与K的面积差要小，亦即该多边形面积大于K的面积。设AE是该多边形的一边，ON是边心距。显然，ON小于圆的半径，即K的一直角边，同时多边形的周长也小于圆周，即K的另一直角边，那么多边形面积小于K，从而导致矛盾。

类似地，当圆面积小于K的面积时，作圆的外切正方形，用同样的方法亦可推出矛盾。故圆面积应等于K。于是得出圆面积等于两直角边分别为圆周长和圆半径的直角三角形面积。

如上阿基米德的证明，并没有涉及极限过程。如同美国学者爱德华（C. H. Edward）在《微积分发展史》中所指出的：

“阿基米德，即使不是在他的正式的分析中，也至少是在他的正式的证明中，没有摆脱希腊人的‘对无限的恐惧’。希腊人的严

格的观念要求使用繁琐的双归谬法，而不是简单的取极限的方法。"[①]

我们无意贬低阿基米德，恰恰相反，作为世界最伟大数学家之一的阿基米德在公元前 3 世纪就成功地应用双归谬法证明了圆面积的命题，其成就是十分杰出的。但就命题证明的方法中所涉及的思想而言，刘徽的成就要比他更辉煌。

类似于圆田术的证明，刘徽在商功章阳马术注文中证明阳马、鳖臑体积公式时亦指出："半之弥少，其余弥细，至细曰微，微则无形"，其表达的同样是无穷小分割思想。在开方术注文中，刘徽还指出：

"不以面命之，加定法如前，求其微数。微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母。退之弥下，其分弥细，则朱幂虽有所余之数，不足言之也。"

开方法求微数，实际就是求无理数的十进分数近似值。从其"虽有所余之数，不足言之也"来看，刘徽明确声明这不是一个无限过程，但开方程序却可以不断进行下去，以至达到人们预先需要的程度。虽然这不是极限过程，但这种开方求微数的思想无疑是极限思想在近似计算中的一种应用。这一应用具有十分重要的意义，它促进了十进小数的产生，亦即刘徽为使我国成为世界上最早使用小数的国家做出了贡献。

作为极限思想应用的还有弧田面积之"密率"。《九章算术》方田章中给出的弧田术是：

"以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一。"

这是个十分粗糙的公式。刘徽在弧田术注文中始则指出了这一公式的近似性，继则又提出了用极限思想无限逼近弧田的计算方案。对后一问题，他说：

① C.H. 爱德华. 微积分发展史（中译本）. 北京：北京出版社，1987，100～101

“宜依勾股锯圆材之术，以弧弦为锯道长，以矢为勾深，而求其径。既知圆径，则弧可割分也。割之者，半弧田之弦以为股，其矢为勾，为之求弦，即小弧之弦也。以半小弧之弦为勾，半圆径为弦，为之求股，以减半径，其余即小弦之矢也。割之又割，使之极细。但举弦、矢相乘之数，则必近密率矣。”

其意是，由《九章算术》勾股第九问“勾股锯圆材之术”，由弦、矢而求其径：

$$圆径=(\frac{弦}{2})^2\div矢+矢。$$

于是，便可无限等分圆弧。于弓形内以弦 b_1 为底，矢 h_1 为高作等腰三角形 Δ_1，则其面积 $S_1=\frac{1}{2}b_1h_1$；再等分圆弧，于两小弓形内作以小弦 b_2 为底，小矢 h_2 为高的等腰三角形 Δ_2，其面积 $S_2=\frac{1}{2}b_2h_2$。刘徽注文中还指出了小弦、小矢的计算方法是：

$$小弦=\sqrt{(\frac{大弦}{2})^2+(大矢)^2};$$

$$小矢=半径-\sqrt{(半径)^2-(\frac{小弦}{2})^2}。$$

如此继续分割下去，半所得等腰三角形面积依次相加为：

$$S=\Delta_1+2\Delta_2+2^2\Delta_3+\cdots+2^{n-1}\Delta_n+\cdots$$
$$=\frac{1}{2}b_1h_1+b_2h_2+2b_3h_3+\cdots+2^{n-2}b_nh_n+\cdots$$

其中，b_k、h_k 分别表示第 $k-1$ 次分割所得小弓形之小弦和小矢。这样的结果如何？刘徽注最后指出：“割之又割，使至极细。但举弦矢相乘之数，则必近密率矣。”所谓“举弦矢相乘之数”，即指全部小三角形的面积之和，密率即指弧田面积的精确值。故当分得极细时，所得弧田面积的值就越接近于精确值。无疑，这也是极限思想在近似计算中的应用。

刘徽极限思想的形成，除先秦诸子、两汉学者无穷思想的影

响外，生产、生活实践中的事例，例如制造圆形器具的手工业生产中，常要把方形的原料加工成圆形，这实际就是化方为圆、化直为曲的过程，司马迁曾把它抽象成“破觚为圜”来比喻汉朝废止秦朝的严刑苛法，他说：“汉兴，破觚而为圜，斫雕而为朴”[①]。刘徽是个布衣数学家，对生产实践具有丰富的感性认识，他又是善于撷取百家精华的巨将，司马迁的形象比喻或许他也很熟悉，故断定刘徽割圆术、极限思想的形成与生产、生活实践及司马迁“破觚为圜”的影响有关不是没有道理的。

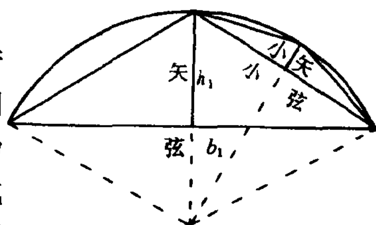


图 2·3·4　弧田分割图

第二节　刘徽的科学论证思想

《九章算术》作为中国古代划时代的数学著作，在东方和世界数学史上占有极其重要的地位。但是，《九章算术》也存在着一些不可忽视的缺点，最突出的是，记载在它上的所有公式、法则都一概没有留下任何推导和证明。这表明，《九章算术》时代的中国古代数学，存在着严重轻视理论论证的倾向。刘徽深刻洞察了这种倾向的危害后指出：“不有明据，辩之斯难。”他第一个为《九章算术》中绝大多数公式作出了理论证明，从而开创了建立在基本概念、基本原理基础上产生必然性结论的演绎论证。他的科学论证思想的主要方面有：

---

① 史记·酷吏列传（第10册，卷118～130）. 北京：中华书局，1959，3131
斫（zhuó 酌），本义为大锄，引申为砍，斩。

一、“推”、“辩”要有明据的思想

刘徽注的重要贡献之一是将先秦诸子关于“推”与“辩”的思想引入数学。亦即数学不仅需要“算”，还需要“推”和“辩”。他在序言中谈论“算术”之根源时说到“事类相推，各有攸归”。这表明，刘徽已将“推”作为自己处理数学问题的重要思想原则。在具体注释中他也多次用到“推”。如圆田术注中“推圆规多少之较”，阳马术注中“谓以情推，不用筹算”，正负术注中“法、实数相推求之术”；等等。何谓“推”？《墨子·尚贤下》曰：“推而上之以是故”[①]，《经下》曰：“在诸其所然者未然者，说在于是推之”[②]。墨家的阐述表明，所谓“推”，不仅包括由已知到未知的综合推演，还包括从未知到达已知的分析逆求。且“推也者，以其‘所不取之’同于‘其所取者’予之也。”[③]这意味着，“推”不仅包括归纳中求同求异的过程，还包括演绎中选言推理的过程。故刘徽的“推”是指逻辑推理。此外，刘徽还谈到“辩”。他在圆田术注文中说：“不有明据，辩之斯难。”这里，刘徽的“辩”如同墨家的“辩”是逻辑的同义词[④]一样，指的亦是逻辑。于是，刘徽实际上提出了一条极为重要的思想原则，即一切“推”与“辩”必须有切实可靠的根据。否则，根据不可靠就很难进行“辩”。

“推”与“辩”的依据是概念的定义和基本原理。刘徽改变了《九章算术》对概念不加定义仅采用“默认”或“约定俗成”的办法，明确地界说了许多概念作为其“推”与“辩”的依据。他还选取长方形面积、长方体体积法则，面积、体积的出入相补原理，

①② 汪奠基. 中国逻辑思想史. 上海：上海人民出版社，1979，113

③ 《墨子·小取》，见：中国社会科学院编. 中国哲学史资料选辑（先秦之部）. 北京：中华书局，1984，475

④ 汪奠基. 中国逻辑思想史。上海：上海人民出版社，1979，104

截面原理，先乘后除或先除后乘不影响其结果的原理等作为基本原理。据此，来进行“推”与“辩”。全部刘徽注完全贯彻了他言而有据的思想原则。例如，《九章算术》方程章“五家共井”问是个不定方程问题，它有5个未知数，4个方程式，应有无限组解，而《九章算术》仅给出了一组解。刘徽在注文中指出：“是故七百二十一为井深，七十六为戊绠之长，举率以言之。”即这组解是一组率之一而已。刘徽的这一判断是言而有据的。因为由刘徽对“方程”的定义出发可得：

(1) 线性方程组中每个方程式各项系数和常数项可以做为一组率（“每行为率”）；

(2) 方程组中方程式的个数与未知数个数相同（“皆如物数程之”）；

(3) 方程组中2个方程式不存在同样的比例（“左右无所同存”）；

(4) 每一方程式都是根据问题的已知条件而建立的（“且为有所据”）。

其中(1)是方程式本身的性质，它是“方程”互乘相消法的依据。又若“左”、“右”2个方程式若存在同样的率，则这2个方程式为同解方程式。若方程组中有一个方程式与题设条件无关，则其解不是该问题的解。而若方程式个数少于未知数个数，它不符合(2)，这是不定方程组，其解不确定。“五家共井”问就是这种形式的方程组，故刘徽断言《九章算术》之答是“举率以言之”。

二、“析理”与“用图”相结合的思想

刘徽在序言中论及研究数学的方法时曾说过一段十分精辟的话，他说：

“又所析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黩，览之者思过半矣。”

这里，刘徽实际提出了科学论证的又一条重要的思想原则——“析理以辞，解体用图”。

何谓理？刘徽注中的“理”用得很多，各处含义不尽相同，但不外乎指道理、规律性或客观实际情况等。何谓“辞”？辞在中国古文中是指言词、文词。但言词、文词是具有语音、语义的词汇按一定的语法和逻辑结构所构成的。故“辞”有时也有逻辑或命题的含义。如《墨子·小取》中“以名举实，以辞抒意，以说出故”① 中的“辞”，东汉哲学家王充的一切思想表达形式，“皆以辞正得之”② 中的“辞”就都具有命题、逻辑的含义。故刘徽的“析理以辞”就是用命题、逻辑进行理论论述，以达到揭示事物客观规律的目的。他“解体用图”中的图，是指图形或作为模型的“棋”。因此，“析理以辞，解体用图”实际就是逻辑推理与直观分析的结合，其目的是探求事物内部存在的规律性。

刘徽注中这一思想的贯彻是一贯的。例如，勾股章第 6 问是著名的“葭生池中”问题。刘徽将它归结为已知勾、股弦差求股、弦的问题。其术的证明是通过“勾实之矩”的出入相补来完成的。刘徽注云：

“令勾自乘，先见矩幂也。出水者，股弦差。减此差幂于矩幂则除之。差为矩幂之广，水深是股。”

若令 a，b，c 分别表示勾、股、弦。则图 2·3·5（a）中曲尺形“勾实之矩”即为

$$a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b),$$

在 a^2 中减去右上角小正方形（差幂 $(c-b)^2$）得宽为股弦差 2 倍即 2（$c-b$）、长为 b 的长方形，亦即

① 中国社会科学院编. 中国哲学史资料选辑（先秦之部）. 北京：中华书局，1984，475

② 汪奠基. 中国逻辑思想史. 上海：上海人民出版社，1979，236

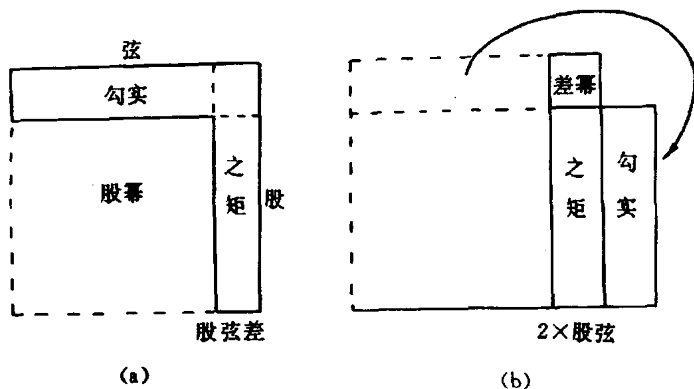


图 2·3·5　"勾实之矩"图

$$a^2-(c-b)^2=2(c-b)\cdot b,$$

故 $$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)},$$

亦即是

$$\text{水深(股)}=\frac{\text{勾}^2-(\text{股弦差})^2}{2\times\text{股弦差}})=\frac{(\text{半池方})^2-(\text{出水})^2}{2\times\text{出水}}。$$

这里，刘徽通过析理与用图的有机结合完成了术的证明。又如，在方田章推证圆面积公式及批判"周三径一"不精确以推求圆周率的精密值时，他说"又按：为图"，"谨按图验，更造密率"等。虽然刘徽使用的图形至今已全部失传，但仅从上述二则注文中，我们足以看出他以"用图"来辅助"析理"的思想是十分明确的。且为了使图形更有效地辅助析理，他还使用了颜色图。在"勾股容圆"题注文中，就有"勾、股相乘为图本体，朱、青、黄幂各二，倍之，则为各四"的记载。

在处理立体问题时，因图形复杂，刘徽改为用棋，并选用立方、堑堵、阳马、鳖臑作为标准的几何体。如《九章算术》中给出的方亭的求积术为："上下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一。"刘徽用棋验征了该求积公式。验证的注文曰：

“假令方亭，上方一尺，下方三尺，高一尺。其用棋也，中央立方一，四面堑堵四，四角阳马四。上下方相乘为三尺，以高乘之，约积三尺，是为得中央立方一，四面堑堵各一。下方自乘为九，以高乘之，得积九尺，是为中央立方一，四面堑堵各二，四角阳马各三也。上方自乘，以高乘之，得积一尺，又为中央立方一。凡三品棋皆一而为三，故三而一，得积尺。用棋之数：立方三，堑堵、阳马各十二，凡二十七棋。十二与三更差次之，而成方亭者三，验矣。”

上述注文中，刘徽声明，这是对方亭体积公式的验证。其方法是，把方亭剖分成“中央立方一，四面堑堵四，四角阳马四“的九个棋。若以 V_1，V_2，V_3，V 分别表示长（立）方体、堑堵、阳马和方亭及其和的体积，则

$$V=V_1+4V_2+4V_3$$

然后，将 V_1 与 4 个 V_2 亦即“中央立方一，四面堑堵各一”合成一新长方体，其长、宽、高分别为 3 尺 (b)，1 尺 (a)，1 尺 (h)。则

$$V_1+4V_2=abh,$$

又将 V_1，$4\times2V_2$ 及 $4\times3V_3$ 即“中央立方一，四面堑堵各二，四角阳马各三”共 21 棋合成另一长方体，便有

$$V_1+8V_2+12V_3=b^2h,$$

而
$$abh+b^2h+a^2h=(V_1+4V_2)+(V_1+8V_2+12V_3)+V_1$$
$$=3V_1+12V_2+12V_3=3V,$$

故 $V=\frac{1}{3}(a^2+b^2+abh)$，

从而验证了方亭的体积公式。

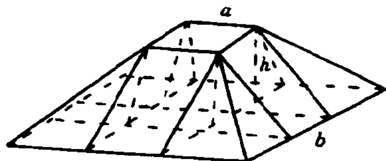


图 2·3·6 方亭的割分

在代数中，他也以“用图”辅助“析理”。如对开方，他在少广章开立方注中说：“言不尽意，解

此要当以棋，乃得明耳。”他用图形的分割完美地说明了开方术程序的数学原理，指出开平方是由对方形的逐次分割来求其边长的。

值得指出的是，刘徽的“用图”并非仅限于辅助“析理”。与希腊数学相比，刘徽的图形不仅是对问题条件的视觉形象，而且是为证明所作的特别设计，因而图形中往往能显示出命题的结论而使之成为数学发现的有力工具。例如，上述“葭生池中”问的“勾实之矩”图业已显示了问题的如下结论：

$$股=\frac{勾^2-（股弦差）^2}{2\times 股弦差},$$

可见，刘徽的“析理”与“用图”是相辅相成的。

三、演绎思想

演绎思想是刘徽科学论证思想的重要组织部分。正是由于刘徽将演绎思想引入数学，中国古代数学才开创了产生必然性结论的演绎论证。刘徽既使用了三段论式推理，又有关系推理，它们都属演绎推理。

例如，《九章算术》方田章方田术曰：

“广从步数相乘得积步。”

刘徽对此注曰：

“此积谓田幂。凡广从相乘谓之幂。”

这里，刘徽为了行文之方便，先说结论，然后说大前提（幂的定义），而把《九章算术》术文作为小前提。其推理的完整表达是：

凡广从相乘（M）谓之幂（P）。此积（S）为广从相乘（M），故此积（S）谓田幂（P）。

这里出现“田”字还应用了附性法。所谓附性法，是在性质判断的主项和谓项前分别加上一个性质涵义相同的概念，从而推出另一个判断作结论的推理方法。其中，从“此积谓幂”到“此田积谓田幂”的推理方法就是附性法，因为后者是在前者的主、谓

项上同加了一个“田”字后获得的。故整个推理是三段论与附性法相结合的演绎推理。

又如，勾股18问刘徽注：

“令二出门相乘，故为半方邑自乘，居一隅之积分。因而四之，即得四隅之积分。故为实，开方除，即邑方也。”

其推理形式为：

(半邑方)^2＝出甲门×出乙门

⇒ (邑方)^2＝4×出甲门×出乙门

⇒邑方＝$\sqrt{4\times 出甲门\times 出乙门}$，

其中每一步都是关系推理。如第一步推理的过程为：

(邑方)^2＝4 (半邑方)^2，(半邑方)^2＝出甲门×出乙门，

由等式的传递关系性质便得

(邑方)^2＝4×出甲门×出乙门。

故为关系推理，且是传递关系式的关系推理。

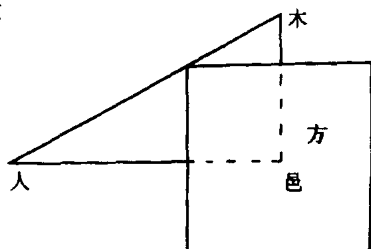


图 2·3·7 出门望木图

刘徽注文中的关系推理是大量的，还可以举出很多。此外，刘徽注中还有不少选言推理、联言推理和假言推理式的演绎推理。可见刘徽演绎思想之深刻。

刘徽之所以能克服前人的忽视理论论证的倾向，而开创出“析理”与“用图”相结合的产生必然性结论的演绎论证，除了他自身具有的科学家素养的内因外，时代的影响也是不可忽视的。

中国封建社会，经过四百年的两汉大发展，到了魏晋时期，出现了以庄园农奴制为基本特征的经济关系和门阀士族对政治舞台的占据，繁琐的两汉经学和谶讳迷信已走到了穷途末路。由于从汉帝国崩溃的瓦砾上生长起来的庄园经济，具有分散的和自成一

统的特性，故世家大族所关注的不是国家所代表的总体利益，而是个体的生存和发展，并在儒道兼综的基础上加以阐发，进而出现了研究易、老、庄三玄[①]的辩难之风。辩难的玄学家们主张通过辩名析理来揭示问题中包含的义理，而不是像过去那样单纯依靠直观意象和比附。正如何晏（190～249）所说的，"理之微者，非物象之所举也。"[②]因为它常导致荒诞和神秘。且辩难的实践又为推理论证积累了丰富的知识。如嵇康（223～262）在《明胆论》中指出："夫论理情性，析引异同，固当寻所受之终始，推气分之所由，顺端极末，乃不悖耳。"[③]即是说，论证必须有明确的论题，可靠的论据和进行从始至终的分析论证。嵇康还指出了辩论方术上的"不尽"与"偏是之议"[④]等毛病。这些无疑都是数学论证的宝贵财富。以严谨为其特点的数学，几百年来积累了大量公式、解法需要对其正确性加以理论论证，而以"析理"为要件的辩难之风的兴起为这个过程的完成准备了客观条件，数学家刘徽就是在这样的条件下，通过"析理"与"用图"的有机结合完成了绝大部分《九章算术》公式的演绎论证，致使我国古代数学开始走上了理论论证的道路而成为一门真正的数学科学。

第三节 刘徽的程序思想和构造性思想

程序思想和构造性思想是刘徽学术思想的另一重要组成部

① （北齐）颜之推·颜氏家训·勉学."《庄》、《老》、《周易》，总谓三玄。"参见：颜氏家训·卷三．勉学，北京：中华书局，1983，66

② 《三国志·魏书·荀彧传附荀恽传》裴松之注引《晋阳秋》，第二册．北京：中华书局，1959，319

③ 汪奠基．中国逻辑思想史．上海：上海人民出版社，1979，266

④ 嵇康．难宅无吉凶摄生论．转引自侯外庐等著．中国思想通史（第三卷）．北京：人民出版社，1957，199，185

分。以《九章算术》为代表的中国古代数学，密切结合社会生产实际，数学的发展，以解决社会生产和生活中的实际问题为主要目的，从而发展了程序性、机械化的算法体系。加之，中国古算以算筹作为计算工具，这就更增强了古算的程序性、机械化和构造性特色。刘徽作为《九章算术》的注释者，一方面面对仅有算法程序而未记载造术原理的《九章算术》诸术，需作出理论论证或合理性解释，另一方面，社会生产实际提出的种种《九章算术》尚未解决的问题需要解决。刘徽正是在这两方面问题的探索中，以他数学家的杰出智慧和卓越才能，进一步发展了《九章算术》的程序思想和构造性思想，并对中国古代数学产生了深刻的影响。

一、程序思想

刘徽的《九章算术》注的术文与《九章算术》的术文一样，是中国古代数学程序性、机械化特点的代表。这些术文都是以一套套程序化的语言来描述的算法，它在筹算中可以不借助运算符号也不保留中间过程，仅依靠等式的逐步变换而获得最终结果。刘徽从实际问题中设计程序、提炼算法作出超越于《九章算术》之术而具有新创造的有重差术、“方程”新术、“方程”的互乘相消法、割圆术等。这些都为中国古代数学程序性、机械化算法体系的进一步发展作出了重要贡献。

重差术是刘徽最为得意的创作，故而自撰自注。刘徽的《重差》一卷原附于《九章算术》勾股章后，隋唐时《重差》摘出为单行本，改名《海岛算经》。但传本《海岛算经》图注均失传，目前仅存九问。不过仅这九问之术即可看出刘徽的程序思想和造术技巧。例如，连索法是重差原理在测广上的应用。《海岛算经》中的第三问“南望方邑”阐明的正是此法。其题云：

“今有南望方邑，不知大小。立两表东、西去六丈，齐人目，

以索连之。令东表与邑东南隅及东北隅参相直。当东表之北却行五步，遥望邑西北隅，入索东端二丈二尺六寸半。又却北行去表十三步二尺，遥望邑西北隅，适与西表相参合。问邑方及邑去表各几何?”

刘徽给出的邑方算法是：

“术曰：以入索乘后去表，以两表相去除之，所得以前去表减之①，不尽为景差，以为法。置后去表，以前去表减之，余以乘入索为实。实如法而一，得邑方。”

即求邑方的算法顺序是，先求景差，后求邑方：

$$景差=\frac{入索\times 后去表}{两表相去}-前去表;$$

$$邑方=\frac{(后去表-前去表)\times 入索}{景差}。$$

这是一个能行且可计算的算法。按照它规定的步骤，任何人利用算筹都能求出解来。对于现代计算工具电子计算机而言，如果我们把上述公式译成算法语言，也是可计算的算法。例如，可译成下述BASIC 语言程序：

```
5    HOME
10   INPUT “入索=”; A
20   INPUT “后去表=”; B
30   INPUT “两表相去=”; C
40   INPUT “前去表=”; D
50   X= (A*B) /C-D
60   Y= (B-D) *A/X
70   PRINT “邑方=”; Y
```

---

① 术原文为：“以入索乘后去表，以两表相去除之，所得为景差。以前去表减之，不尽为法。”其中，“为景差”三字应移至“以前去表减之不尽”之后。这里的术文依清人李锳《海岛算经纬笔》校改。

80　END

邑方算法的造术原理是：

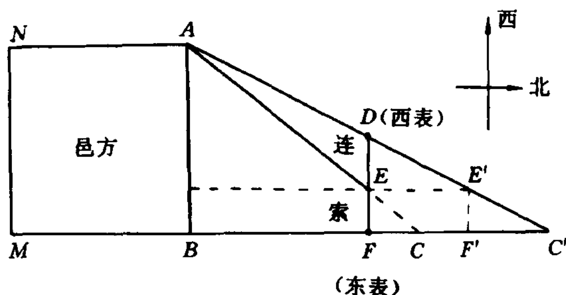


图 2·3·8　望邑图

如图 2·3·8，F、D 为东西两表，由相似勾股形得

$$F'C'=\frac{E'F'\times FC'}{DF}=\frac{\text{入索}\times\text{后去表}}{\text{两表相去}},$$

故　$$\text{景差}=F'C'-FC=\frac{\text{入索}\times\text{后去表}}{\text{两表相去}}-\text{前去表}。$$

按重差公式，有

$$\text{邑方}=AB=\frac{EF\times FF'}{F'C'-FC}+EF$$

$$=\frac{EF\times(FC'-F'C')}{F'C'-FC}+EF=\frac{EF\times\left(FC'-\dfrac{E'F'\times FC'}{DF}\right)}{\dfrac{E'F'\times FC'}{DF}-FC}+EF$$

$$=\frac{(FC'-FC)\times EF}{\dfrac{E'F'\times FC'}{DF}-FC}=\frac{(\text{后去表}-\text{前去表})\times\text{入索}}{\dfrac{\text{入索}\times\text{后去表}}{\text{两表相去}}-\text{前去表}}。$$

刘徽的《海岛算经》九问依次是望海岛、望松、望邑、望谷、望楼、望波口、望清渊、望津、临邑，每题都是从不同测点获得不同的测望数据，相互较核，取其差值为法而给出明显公式，而这些公式都是如上的程序化算法。如果将刘徽的《海岛算经》中关于测望的算法程序与16世纪的欧洲同类问题比较，“例如1569年

在威尼斯出版的书籍上有相当于《海岛算经》第一题的间接测量，图中明显可见也利用表间、表高数据以计算塔高和塔远”，然而这“较刘徽已迟出一千多年。”①

刘徽的互乘相消法也是一系列算法程序的组合。该术记于“方程”章第七问的注释中，其问题是：

“今有牛五、羊二，直金十两；牛二、羊五，直金八两。问牛、羊各直金几何？”

刘徽注：

“假令为同齐，头位为牛，当相乘。右行定，更置牛十，羊四，直金二十两；左行牛十，羊二十五，直金四十两。牛数等同，金多二十两者，羊差二十一使之然也。以少行减多行，则牛数尽，惟羊与直金之数见，可得而知也。以小推大，虽四、五行不异也。”

其中“直”即值。该注文实际给出了求解线性方程组的一系列演算程序，这程序是：

$$\begin{pmatrix}2 & 5\\5 & 2\\8 & 10\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{互乘}}\begin{pmatrix}10 & 10\\25 & 4\\40 & 20\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{相消}}\begin{pmatrix} & 10\\21 & 4\\20 & 20\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{约简}}\begin{pmatrix} & 5\\21 & 2\\20 & 10\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{互乘}}$$

$$\begin{pmatrix} & 105\\42 & 42\\40 & 210\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{相消}}\begin{pmatrix} & 105\\42 & \\40 & 170\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{遍约}}\begin{pmatrix} & 1\\1 & \\20/21 & 34/21\end{pmatrix}$$

即牛、羊一头的直金数分别为$1\frac{13}{21}$两和$\frac{20}{21}$两。刘徽在注文中最后指出，这种解线性方程组的计算程序可以推广到更多元的“方程”中去。显然，刘徽的互乘相消法的计算程序远比直除法简洁。

---

① 沈康身.《九章算术》与刘徽的测量术. 参见：《九章算术》与刘徽. 北京：北京师范大学出版社，1992，181～189

遗憾的是，刘徽的这一思想在后世近千年中未引起重视，直至南宋秦九韶《数书九章》(1247 年) 才完全废止直除法，并提出了互乘相消法的一般程序。

以《九章算术》及刘徽注为代表的中国古代数学的程序性和机械化特色，对数学的发展产生了深刻的影响。其中，负数概念的产生远领先于世界就是突出一例。

我国负数概念的早出，不仅得益于先秦诸子相反相成的哲学思想，还得益于我国古算的程序性和机械化特色。正是由于“方程”两行间同位之数互有大小，彼此相消时不可避免地会出现“以小减大”而不够减的情形，若不引进正负，则方程的两行相消便不能通行无阻，正如刘徽所说的“其并减之势不得广通，故使赤、黑相消夺之”[1]，故正负数的早出还得益于解线性方程组的程序性和机械化。

当前，随着计算机的出现，这种程序性和机械化算法体系对数学发展的影响将越来越为人们所重视。如吴文俊所断言的：

“《九章算术》与《九章算术》刘徽注所贯串的机械化思想，不仅曾经深刻影响了数学的历史进程，而且对数学的现状也正在发扬它日益显著的影响。它在进入二十一世纪后在数学中的地位，几乎可以预卜。”[2]

二、构造性思想

所谓数学的构造性观点，通常关注的是问题解的如何求得和能行方法的付诸实现。这种观点的突出表现是描述的直观性和实现的具体性。亦即对讨论的对象能进行较为直观的描述和能实现

① 《九章算术·方程》正负术刘徽注。

② 吴文俊．东方数学典籍《九章算术》及其刘徽注研究序．西安：陕西人民教育出版社，1990

具体求解。它区别于仅关心数学对象的存在性、唯一性和可能性等问题的非构造性观点。通常“前者是做的数学（*mathematics of doing*），后者是在的数学（*mathemetics of being*）。”[①] 而刘徽注正是这种做的数学的代表，其构造性思想表现为：

（1）数学模型的构造。

刘徽构造的数学模型，根据功能的不同分为概念型的，方法型的，原理型的三类。他的概念型模型是通过构造对象的运算性质来建立的。如率的定义是“凡数相与者谓之率。率者，自相与通。有分则可散，分重叠则约也。等除法实，相与率也。”[②] 此定义即是通过构造率的运算性质来建立的，故这样的定义属概念型模型，这种概念型模型是构成复杂数学模型的元素。刘徽注中的术，都是方法型模型，而原理型模型则是方法型模型在更高层次上的抽象，其表达的是一般规律、一般原理，应用范围广。例如，刘徽将正比、反比、复比、比例分配等各种比例问题归结为今有术这种更高层次的数学模型即为原理型模型。又如，齐同原理、刘徽原理、出入相补原理、不夫本率原理等均属原理型模型。这两种模型的共同特点是，它们均为用数学语言表达的数学结构，其计算程序可用筹式的变形来实现，术恰似计算机的软件，算筹好比硬件，术是算筹变换的指令，而算筹变换则是术的具体体现。

（2）图形的构造。

刘徽所采用的“解体用图”之法，与欧几里得的逻辑演绎大相径庭。他证明勾股定理的一些公式，完全凭借图形的移来补去之间使结论自然而出，其证明方法是构造性的，它的智慧并不表

---

① 胡世华．信息时代的数学．参见：邓东皋等编．数学与文化．北京：北京大学出版社，1990，267

② 《九章算术·方田》经分术刘徽注。

现在论证过程中，而是集中在数学对象的构造上。这种把几何量之间的深刻内在关系，用极其简练的构图呈现在人们眼前，是绝非轻而易举的事。

利用特殊构图来论证定理与公式，是刘徽的独特创造。“牟合方盖”的发明，表现了他高超的构造能力。由阳马与鳖臑拼合为”赤黑堑堵”而分割又显示出他在构造上的巧思。球体积公式探求思路的发现，“刘徽原理”、整勾股数公式的证明，都是数学史上的杰出成就，然而这些都是他构造性思想的成果。

刘徽注的构造性思想，对中国和世界数学的发展产生了深刻的影响，其重大意义，正如吴文俊所指出的：

“我国传统数学在从问题出发以解决问题为主旨的发展过程中建立了以构造性与机械化为其特色的算法体系，这与西方数学以欧几里得《几何原本》为代表的所谓公理化演绎体系正好遥遥相对。《九章算术》与《九章算术》刘徽注是这一机械化体系的代表作，与公理化体系的代表作欧几里得《几何原本》可谓东西辉映，在数学发展的历史长河中，数学机械化算法体系与数学公理演绎体系曾多次反复互为消长，交替成为数学发展中的主流。肇始于我国的这种机械化体系，在经过明代以来近几百年的相对消沉后，由于计算机的出现，已越来越为数学家所认识与重视，势将重新登上历史舞台。”①

第四节 刘徽的数学美学思想和方法论

数学作为文化的重要组成部分，其发生、发展与人们的审美

① 吴文俊. 东方数学典籍《九章算术》及其刘徽研究序. 西安：陕西教育出版社，1990

心理定势和思维方法趋向有着千丝万缕的联系。刘徽在数学上的重大贡献离不开他的数学美学思想和方法论思想的指导，他的数学美学思想和方法论思想在他数学创造活动中的渗透组成了他学术思想的不可缺少的部分，这里主要介绍两个方面。

一、“要约”和“贵易”

对于数学的理论和方法，刘徽在《九章算术》注中指出了如下的思想原则：即反对以多为贵，主张简洁，明了，易于为人掌握。他在方程章的方程新术中写了一段很长的前言，明确地表达了这一思想。他说：

“其拙于精理徒按本术者，或用算而布毡，方好烦而喜误，曾不知其非，反欲以多为贵。故其算也，莫不暗于设通而专于一端。至于此类，苟务其成，然或失之，不可谓要约。更有异术者，庖丁解牛，游刃理间，故能历久其刃如新。夫数，犹刃也，易简用之则动中庖丁之理。故能和神爱刃，速而寡尤。”

刘徽的这段注文，借用《庄子·养生主》里“庖丁解牛”的典故来阐明“要约”、“贵易”思想的含义及其重要性。其意是，“庖丁”解牛要“游刃理间”，刀刃才能“历久”“如新”。“数”的原理和方法，也要遵循规律，做到简要、明了，才能“易知”、“易从”，才有更广泛、更持久的应用。他批评某些算家用算如布毡“以多为贵”是“拙于精理”的做法。这一褒一贬中所阐明的思想正是刘徽倡导的数学美学及其方法论的思想原则。这一原则与近代数学美学三大特征之一的简洁美十分相似。不过，在内涵上两者是有区别的。由于中国古代数学密切结合社会生产实际，且内容以计算为主，故这种要约、贵易主要表现为理论和造术的简明性，计算的程序性和数形的结合性等方面。

刘徽倡导要约、贵易是始终如一的，且贯穿于全部《九章算术》注中。例如，在方程章第1题的注文中，他指出：“用算繁而

不省。所以别为法，约也。”在商功章第6题的注文中，谈到用舍弃小数处理圆周率的方法，目的是“贵欲从易”。在约分问题上，他在方田章第6题注文中说：“分之为数，繁则难用。”即约分是为了化繁为简，化难为易。他在合分术注中还具体阐明了这一方法的数学原理，指出：“其所以相减者，皆等数之重叠，故以等数约之。”“约而言之者，其分粗；繁而言之者，其分细。虽则粗细有殊，然其实一也。”亦即等数犹如量之最大公度，法与实皆是它的整数倍，余数随着计算过程减而损之，故当过程进行到有限步后必然求得等数，这时用最大公度度量，其分为“粗”，从而“等除法实”便获得了最简分数。

刘徽的要约、贵易思想，不仅表现在他对具体问题的微观处理上，更表现在他对《九章算术》注释的宏观构思上，例如，他将率看成计算的“纲纪”，并用它解释了《九章算术》的大部分术文，涉及二百多个问题。其中，他用率的理论创立“方程新术”就是突出一例。其思路是，先消下“实”，再转向消“物”，以寻求各“物”之比率，从而用今有、衰分之术求解。这种用率的理论统一《九章算术》各术的方法，使《九章算术》的理论达到了最大程度的简化和明化。

刘徽的“要约”、“贵易”思想，与历史的、时代的影响密切相关。除前引《庄子·养生主》之说外，他的“易简用之”，出于《易传·系辞》：“易则易知，简则易从。……易简而天下之理得矣。”[①] 又，他生活的时代，正是儒学走向经学化道路而不断衰微的时代。经学家们将儒家典籍作为圣经进行训解和阐发。他们或以经解经，或以字解经，或以事义解经，形式烦琐，学风僵化。“分

---

① 易传·系辞．参见：中国社会科学院编．中国哲学史资料选辑（先秦之部）．北京：中华书局，1984，562

文析字，烦言碎辞，学者罢老且不能究其一艺”[①]就是当时情况的一种写照。这种支离破碎的章句之学已将儒学推向了死胡同。而在刘徽时代已发展起来的以抽象思辩和“贵元”为特征的曹魏玄学，在内容和形式上则要求简约，如徐干（171～218）所说，“然则辩之言必约以至，不烦而谕”[②]。这种对烦琐形式和僵化学风否定的文化思潮，对刘徽要约、贵易思想的形成并由此促进他在数学上的创造，无疑都产生了深刻的影响，这是因为数学科学本身，就是以简洁性为其基本特征的。但是，由于经学化影响的根深蒂固，加之儒家“述而不作，信而好古”[③]思想舆论之强大，刘徽的著述竟仍采用了注经的形式，它极大地妨碍了刘徽数学理论、思想的表述，也限制了他对后世的影响，这不能不说是一种十分令人遗憾的不足，可叹的是，这种遗憾在尔后的数学发展史上还延续了相当长的一个历史时期[④]。

二、引而伸之，触类而长

“引而伸之，触类而长之”是刘徽处理数学问题的又一方法论原则。这是指数学的研究不应仅满足于局部的、具体的、个别的结论，而要通过具体事例的讨论，引出普遍的原理、原则和方法，以求得更为广泛的应用。亦即要注重数学结论、数学方法的概括和推广。仅在序言中，他就两次提到了这一原则，指

---

① 刘歆．移让太常博士书．参见：〔明〕张溥编．汉魏六朝百三名家集 1．江苏广陵古籍刻印社影印，1990，270

② 徐干．核辩．参见：汪奠基著．中国逻辑思想史．上海：上海人民出版社，1979，247

③ 论语·述而．参见：中国社会科学院编．中国哲学史资料选辑（先秦之部）．北京：中华书局，1984，282

④ 席振伟．刘徽数学思想研究．参见：《数学史研究文集》（四）．呼和浩特：内蒙古大学出版社、台北：九章出版社，1993

出：

“暨于黄帝神而化之，引而伸之，于是建历纪，协律吕，同稽道原，然后两仪四象精微之气可得而效焉。”

“触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入。”

在粟米章今有术注中，他也说：

“凡九数以为篇名，可以广施诸率，所谓告往而知来，举一隅而三隅反者也。”

所谓“引而伸之”、“触类而长”或“告往而知来”、“举一隅而三隅反”，说法不一，含义却相同。它是刘徽数学研究的重要指导原则，全部刘徽注是实践了这一方法论原则的。

（1）齐同术的引伸推广。

《算数书》和《九章算术》中已有同的概念，赵爽也使用过“齐同”。刘徽在此基础上加以引伸推广。最初，齐同术是一种通分的方法，其意方田章合分术刘徽注云：

“众分错杂，非细不会。乘而散之，所以通之。通之则可并也。凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同。同者，相与通同共一母也；齐者，子与母齐，势不可失本数也。”

即“同”是求公分母，“齐”是使分子、分母扩大相同的倍数，同与齐的结合完成了通分过程。然而齐同的方法论价值并非局限于此。刘徽通过触类而长，将它赋于更一般的意义，指出：

“然则齐同之术要矣：错综度数，动之斯谐，其犹佩觿解结，无往而不理焉。乘以散之，约以聚之，齐同以通之，此其算之纲纪乎。”

亦即，齐同实际是为使数量相通，使之全体在“不失本率”条件下的变形规则。正是由于齐同具有使数量相通的普遍的方法论意义，故刘徽将它譬喻为解结之佩觿，是运算之纲纪。刘徽对齐同意义的引伸推广，大大扩展了其应用范围。如“应用齐同术求几个分数的平均值、比较几个分数之间的大小、解‘均输’问题、

'盈不足'问题和'方程'问题等等。"[①]例如，均输章第10问是：

"今有络丝一斤为练丝一十二两，练丝一斤为青丝一斤一十二铢。今有青丝一斤，问：本络丝几何？"

刘徽的方法是，先将题中两对比率约简为相与率：

(络率16，练率12) $\xrightarrow{\text{以等数4约之}}$ (络率4，练率3)；

(练率384，青率396) $\xrightarrow{\text{以等数12约之}}$ (练率32，青率33)。

接着他指出：

"凡率错互不通者，皆积齐同用之。放此，虽四五转不移也。言同其二练者，以明三率之相与通耳。于术无以异也。"

其意谓，由于上述两组率中二练之数不同，络4与青33不相当，故"率错互不通"，因而"积齐同用之"：

(络4，练3) $\xrightarrow{\text{以32同乘}}$ (络128，练96)；

(练32，青33) $\xrightarrow{\text{以3同乘}}$ (练96，青99)。

此时，二练相同，故"三率之相与通"，便得(络128，练96，青99)。据此，按今有术便可求得络丝之数。刘徽还指出，这种使用齐同的方法，"虽四五转不异也"，亦即它可类似地推广到更为复杂的连锁比问题。对于"方程"术，刘徽根据齐同的引伸意义认为，"齐"就是同组各率扩大(或缩小)相同的倍数，故"方程"术中"遍乘"就是"齐"，"方程"中两行头位(或相应的某位)相同，就是两组率的齐同。而遍乘后直除，这与互乘后相消结果完全相同，故"方程"术便可以互乘相消法代替直除法。可见，刘徽互乘相消法之"方程"术的产生得益于他齐同概念的普遍化。

(2)"方程"术的以小推大。

使用齐同原理，刘徽将解方程组中的直除法，简化为互乘相

① 李迪．刘徽的数学思想．参见：科学史文集(第8辑)．上海：上海科学技术出版社，1982，70

消法。它适用的范围如何？他在方程章第7题注文中指出："以小推大，虽四、五行不异也。"亦即互乘相消法可以完全一样地推广至行数更多的"方程"中去。在第3、4题注文中，他又反复强调了正负数运算法则在解方程组问题中的广泛应用，不受元数多少的限制。如在第3题注文中他说："又，本设诸行，欲因成数以相去耳，故其多少无限，令上下相命而已。"在第4题注文中他又说："正负之术本设行列，物程之数不限多少，必令与实上、下相次，而以每行各自为率。然而或减或益，同行异位殊为二品，各自并、减之差见于下也。"其中，两次所说的"本设"是指未知数个数。即正负数运算法则不受"方程"中未知数个数的限制而可以广为应用。

（3）重差术的触类而长。

刘徽的"引而伸之、触类而长之"的方法论思想在重差问题的处理上反映得更突出。他在序言中说：

"度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入。"

即他以重表法、连索法、累矩法为测高、深、广、远的三种基本方法，其余都是这些基本方法的引伸。传本《海岛算经》九问中第1、3、4题顺次阐明了这三种基本方法。其余6个问题，有4个是"三望"题，2个是"四望"题。而这些三望、四望题，不过是这些基本方法的进一步应用而已。例如，《海岛算经》第2问"松生山上"就是用重表法三望的例子。该题云：

"今有望松生山上，不知高下。立两表，齐高二丈，前后相去五十步，令后表与前表参相直。从前表却行七步四尺，薄地遥望松末，与表端参合。又望松本，入表二尺八寸。复从后表却行八步五尺，薄地遥望松末，亦与表端参合。问：松高及山去表各几何？"

由于刘徽《重差》注图失传，其求解未得其详。但据他关于

“凡望极高、测绝深而兼知其远者必用重差、勾股，则必以重差为率，故曰重差”① 的思想猜测，其方法可能出于勾股相似原理：

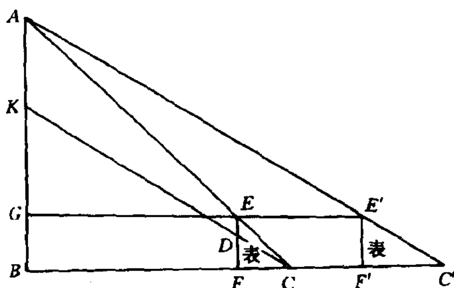


图 2·3·9　松高图

据不失本率原理有：

$$\text{勾股形 } ABC \text{ 中，} \frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FC};$$

$$\text{勾股形 } KBC \text{ 中，} \frac{KB}{DF}=\frac{BC}{FC}。$$

从而

$$\frac{AB}{EF}=\frac{KB}{DF}=\frac{AB-KB}{EF-DF}=\frac{AK}{ED},$$

故

$$AK=\frac{ED}{EF}\times AB。$$

应用岛高公式得

$$AK=\frac{ED}{EF}\times\left(\frac{EF\times FF}{F'C'-FC}+EF\right)=\frac{ED\times FF'}{F'C'-FC}+ED,$$

故得术：“以入表乘表间为实，相多为法，除之。加入表，即得松高。”即松高公式的求解是基本解法“重表法”的触类而长之。在原理上，不管望松、望邑或望其他，依据的原则都是“重测取差”，故定名为重差之术。

① 刘徽.《九章算术》注原序。

引而伸之，触类而长之是中国古代早就熟知的方法论原则。孔子首先在教育上倡导了这一原则。他说

“赐也，始可与言《诗》已矣，告诸往而知来者。”① “不愤不启；不悱不发；举一隅不以三隅反，则不复也。”②

《易传·系辞》也指出：

“引而伸之，触类而长之，天下之能事毕矣。”

魏晋玄学家十分重视在观察、思考和辩论中使用这一原则。例如，嵇康认为：

“触类而长，所致非一。”③ “故善求者，观物于微，触类而长，不以己为度也。”④

但将这一方法论原则成功应用于数学研究的，刘徽可谓最突出者之一。他将前人的言论融会贯通，并为自己的研究工作服务，这充分反映了刘徽作为一个伟大数学家的方法论修养。

第五节　刘徽的治学思想

刘徽在数学上的巨大成就，离不开他正确的治学思想的指导。他的治学思想，主要包括如下三方面。

---

① 论语·学而。参见：中国社会科学院编。中国哲学史资料选辑（先秦之部）. 北京：中华书局，1984，255

② 论语·述而. 参见：中国社会科学院编. 中国哲学史资料选辑（先秦之部）. 北京：中华书局，1984，282

③ 嵇康. 琴赋. 参见：〔明〕张溥编. 汉魏六朝百三名家集（2）. 苏州：广陵古籍刻印社影印，1990，241

④ 嵇康. 答阮侃释难宅无吉凶摄生论. 参见：〔明〕张溥编. 汉魏六朝百三名家集（2）. 苏州：广陵古籍刻印社影印，1990，270

一、收诸家之长，立自家之说

博采众长是刘徽治学的重要指导思想。他在序言中就明确表白了自己的治学主张："采其所见"，"悟其意"。这是刘徽所以取得如此杰出成就的最为重要的原因。

中国先秦时期形成了百家争鸣的局面，诸子百家的思想争论，为中国古代的哲学思想、逻辑思想和文化思想积累了宝贵的财富，随后，至魏晋时期，又有玄学的清淡之风。渊源流长的中国传统数学，在刘徽前的数百年又出现了《周髀》和《九章算术》，居于世界数学的领先地位。刘徽的数学创造正是在这样的背景下产生的。

刘徽对诸子百家思想的态度，是兼收诸家之长而不专主一说。他广采诸见，仔细揣摩。对先秦诸子的言论，不是生吞活剥，而是融会贯通，并加以改造、发展成为自己的观点，以服务于数学研究。例如，在无穷问题上，先秦时有辩论家关于"一尺之棰"的著名潜无穷命题，又有墨家的"不可斲"和道家的"微则无形"的实无穷命题，他把诸家的思想观念统一起来，用于《九章算术》圆田术、弧田术、阳马术的证明中，创造了割圆术、刘徽原理，形成了先进的极限思想。又如，墨家注重类概念，主张"以类取，以类予"，儒家主张"引而伸之"、"触类而长"、"举一反三"，刘徽将儒墨两家的思想结合起来，用于数学研究，在数的运算、形的变换方面，形成了化异类为同类的思想，保证了异类对象间运算和变换的通行无阻。据此，还建立了齐同原理、不失本率原理等。在论述数的同类与异类的关系时，他不是生搬前人的言论，而是有批判地吸收。例如，何晏指出："同类无远而相应，异类无近而

不相违。"[①] 这显然是个诡辩命题。刘徽加以改造成为："数同类者无远；数异类者无近。远而通体者，虽异位而相从也；近而殊形者，虽同列而相违也。"对逻辑推理和理论论证，庄子在《天下》篇中有"析万物之理"的说法，但那里的"析万物之理"意谓支离万物的常理[②]。魏晋时辩难的玄学家提出辩有"理胜"有"辞胜"，嵇康还指出："'至物'微妙，可以理知，难以目识。"[③] 刘徽吸收了魏晋玄学家关于"理胜"、"辞胜"和"可以理知，难以目识"的思想，并将庄子"析万物之理"的原意加以改造，提出了"析理以辞"的原则，作为他注释《九章算术》的重要指导思想。他还吸收了东汉哲学家王充"事莫明于有效，论莫定于有证"[④] 的思想，提出了"不有明据，辩之斯难"的思想原则。刘徽关于"发于一端"的数学树思想，与《淮南子》的论述："今夫万物之疏跃枝举，百事之茎叶条梓，皆本于一根，而条循千万也。"[⑤] 十分相似，此外，刘徽注中还有一些论述也与《淮南子》相近[⑥]，据此断定，刘徽数学树思想的形成必受《淮南子》启发无疑。刘徽兼收诸家之长，并加以消化吸收。他精心研究了墨家、儒家、道家等先秦诸子的著述及《周易》、《周礼》、《考工记》、《左传》等经典及注释，研究了司马迁、刘安、王充、张衡等著作，也研究了

---

① 何晏. 列子·仲尼篇注引. 参见：诸子集成·列子·卷四·仲尼第四（第三册）. 北京：中华书局，1954，41

② 《庄子·天下》曰："判天地之美，析万物之理，察古人之全，寡能备于天地之美，称神明之容。"这里，"析万物之理"意谓支离万物的常理。参见：中国社会科学院编. 中国哲学史资料选辑（先秦之部）. 北京：中华书局，1984，774

③ 嵇康. 养生论. 引自侯外庐主编. 中国思想史纲（上册）. 北京：中国青年出版社，1980，190

④ 王充. 论衡·薄葬. 引自汪奠基著. 中国逻辑思想史. 上海：上海人民出版社，1979，232

⑤ 刘安. 淮南子·俶真训.《诸子集成》(第七册). 北京：中华书局，1954，24

⑥ 郭书春. 古代世界数学泰斗刘徽. 济南：山东科学技术出版社，1992，335

曹魏玄学家的著作。在中国古代数学著作中，能够明确指出受如此多的思想家和文史典籍影响的，刘徽的《九章算术》注是仅见的。他的学术思想的形成和数学成就的取得离不开他对思想、文化的传承。刘徽不仅作为一个伟大数学家，他是当之无愧的，而且作为极有贡献的思想、文化的传承者，他也是当之无愧的。

二、实事求是，治学严谨

实事求是是刘徽治学思想的精髓。这首先表现在他反对数字神秘主义。汉代盛行谶纬迷信，数字神秘主义也开始出现。张衡在推求球体积公式时，以阴阳奇耦之说为指导进行推演。刘徽指出其推衍是为了协调阴阳奇耦，缺乏数学根据。其次，他十分强调理论的重要性，提出了“不有明据，辩之斯难”的思想原则，这实际是刘徽学术思想的精髓。他反对空话，在圆田术注中他指出：“恐空设法，数昧而难譬，故置诸检括，谨详其记注焉。”在方程新术中，他又说：“聊复恢演，为作新术，著之于此，将亦后导疑意。网罗道精，岂传之空言？”他对《九章算术》的绝大部分术都作出了理论论证，其证明推理严密，论证有据，未有循环论证的错误，仅个别之处失误。刘徽具有知之为知之，不知为不知的美德。他设计了牟合方盖，指出了探求球体积公式的正确方向，但没能求出牟合方盖的体积。对这样的不足，他如实袒露，寄希望于后学，在少广章开立圆术注中，他写道：“观立方之内，合盖之外，虽衰杀有渐，而多少不掩。判合总结，方圆相缠，浓纤诡互，不可等正。欲陋形措意，惧失正理，敢不阙疑，以俟能言者。”刘徽的贡献如同阮元在刘徽列传中所评论的：“刘徽的注九章与许叔重说文解字同有功于六艺，是岂尊崇之过当乎。”[1] 而刘徽这些成绩的取得从根本上都离不开他实事求是治学思想的指导。

---

① （清）阮元．畴人传，卷五“刘徽”。

三、反对踵古，注重创新

创新而不踵古是刘徽治学思想的又一重要方面，这是刘徽实事求是治学思想的升华。这首先反映在他对《九章算术》的态度上。东汉时，《九章算术》已被官方奉为经典，但刘徽并不迷信它。他在注文中如实指出了《九章算术》若干不精确或错误之处。例如，少广章第16题注文中，他说："术或有以借算加定法而命分者，虽粗相近，不可用也。"对于《九章算术》研究者中固守"周三径一"古法的思想，他批评说："世传此法，莫肯精核；学者踵古，习其谬失。"[①] 全部刘徽注，字里行间洋溢着创新的精神。他用注释的方式，构建了《九章算术》的数学理论体系，并为《九章算术》绝大部分公式作出了理论证明，从而开创了中国古代数学演绎论证的道路，他在刘徽原理、极限思想等方面作出了领先于世界的杰出成就，所有这些都是他反对踵古、注重创新的最好注脚。反过来，他之所以能成为3世纪杰出数学家一点也离不开他创新而不踵古治学思想的指导。

---

① 《九章算术·方田》圆田术刘徽注。

第四章　刘徽的影响和地位

本章对刘徽的影响和地位进行较为全面的论述，并把现代研究列入，分为以下三节。

第一节　对后世的影响

一位科学家对后世是否有影响，影响有多大？主要看其思想、方法和成果被接受与采纳的程度怎样而定。在这三者中，思想、方法尤为重要，因为好的思想、方法一般不受时间和地域的限制，而具体成果往往时间性较强，新成果出现之后，旧成果被代替。在中国数学史上，并不是完全按照这种一般规律发展，反常现象不断出现。就刘徽对后世的影响来说更是如此。为了讨论方便起见，本节把由 263 年到 1911 年分为五个历史阶段。

第一阶段：刘徽以后到唐代李淳风等时止，相当于 263 年到 660 年左右。在这约 400 年中，由于有祖冲之父子、李淳风等人的工作，刘徽的影响是全面而深刻的。祖冲之在数学上的成就来自于刘徽的思想和方法。他在刘徽的基础上对《九章算术》进行注解，实际上是对刘徽注作注，由此形成《缀术》一书。其子祖暅之再加一些内容，附于其父书之后。由于《缀术》等书的失传，所以无法知道祖氏父子受刘徽影响的全貌，但影响的全面、深刻绝无疑问。人们最熟悉的两个例子，能清楚说明这一点。

其一，祖冲之关于圆周率的研究。刘徽批判了“周三径一”的原始圆周率值，用割圆术方法求得了较精密的 157/50（=3.14）。祖冲之在刘徽割圆术基础上继续推求，得到更精密的结果。他不

仅吸收了刘徽的方法，而且改进、发展了刘徽的数学思想。

其二，祖冲之父子关于开立圆的研究。刘徽对于《九章算术》中已知球体积反求球径的不精确计算进行了深入研究，提出了"牟合方盖"概念，并且认为

球积：牟合方盖积$=\pi:4$，

只要求出牟合方盖的体积，可以反求球径。但是刘徽没有解决牟合方盖的体积的问题。重要的是，他给出了一种新的思想方法。祖冲之父子完全接受了这种方法，祖暅之说："刘徽、张衡二人皆以圆囷为方率，丸为圆率"，于是在此基础上加以变通，"乃设新法"，求出了牟合方盖的体积。他还指出："等数既密，心亦昭晰。张衡仿旧，贻哂于后；刘徽循故，未暇校新，夫岂难哉？抑未之思也。"[1] 尽管带有批评的意思，可是所设新法正是来自刘徽的最重要的思想。

刘徽对祖氏父子的影响极其深刻，可以说"没有刘徽就不可能有祖冲之。"[2]

刘徽对隋唐数学家同样有多方面的影响，刘焯、王孝通、李淳风等都接受了刘徽的思想方法。刘焯是隋代最卓越的科学家，对《九章算术》等书，"莫不核其根本，穷其秘奥。"[3] 在历法研究中首次采用了二次等间距内插法。对《九章算术》能如此深入研究和有创造性成果的刘焯不能与刘徽的思想方法无关，他"核其根本，穷其秘奥"的内容肯定包括刘徽的思想方法。

王孝通至少对刘徽的几何工作有全面而深入的了解，因而能够给出正确评价。他考虑问题的方法深受刘徽的影响，例如把较

① 《九章算术》"少广"24题李淳风注。

② 李迪．刘徽的数学思想．科技史文集，第8辑"数学史专辑"．上海：科学技术出版社，1982，67～78

③ 《北史》卷八十二"刘焯"；《隋书》卷七十五"刘焯"。

复杂的立体分解为若干已知求体积公式的立体[1]等。沈康身指出："唐王孝通《缉古算经》是商功章、勾股章及其刘徽注的发展，特别是第3题限工分配直接运用凫雁术中的齐同思想。"[2]

李淳风是比较全面掌握刘徽数学工作的科学家，他和其他一些学者对《九章算术》进行了注解，当然也同时研究了刘徽的工作，接受了刘徽的思想。例如李淳风主张："凡为术之意，约省为善"[3]，刘徽特别强调化繁为简，反对"以多为贵"的作法[4]。但是，由于他只是作注而不是独立的数学著作，所以所受影响不十分明显。

第二阶段：李淳风以后到北宋太宗末年，相当于660年左右到1000年。在这约340年间，因无像样的数学著作出现，刘徽的影响没有表现，估计影响很小。大约完成于五代末期的《谢察微算经》残卷，是一部初等数学，但是在"九章名义"一节照录了刘徽对各章所加的六字注文，列于下：

一曰方田［以御田畴界域］，
二曰粟布［以御交质变易］，
三曰衰分［以御贵贱廪税］，
四曰少广［以御积幂方圆］，
五曰商功［以御功程积实］，
六曰均输［以御远近劳费］，
七曰盈朒［以御隐杂互见］，

---

① 郭世荣.《缉古算经》造仰观台题新解. 自然科学史研究，13卷2期，1994，106～113

② 沈康身. 刘徽生平，数学思想渊源及其对后世影响的试析. 参见：刘徽研究. 西安：陕西人民教育出版社、台北：九章出版社，1993，79～86

③《九章算术》卷4第11题李淳风注。

④ 李迪. 刘徽的数学思想. 科技史文集，第8辑"数学史专辑"。上海：上海科学技术出版社，1982，67～78

八曰方程［以御杂揉正负］，

九曰勾股［以御高深广远］①。

其中有两个字与刘徽原文不同，即“廪税”和“杂揉”，各本《九章算术》注均为“稟税”“错揉”，章名也有两个略有变化，即“粟布”和“盈朒”，原文为“粟米”和“盈不足”。这几点不同是否为谢察微所改，很难断定。然而不论如何，谢察微是完全接受了刘徽的注文。在他的书的失传部分中很可能包括有刘徽影响的其他内容。

除这个事实例外，还看不到有其他影响。可以说这是刘徽影响的第一个低潮时期。

第三阶段：约从北宋真宗起到元文宗末年，相当于1000年到1330年。在这300多年中，除两次雕版印刷《九章算术》、《海岛算经》外，数学名家辈出，如楚衍、刘益、贾宪、蒋周、沈括、秦九韶、李冶、杨辉、王恂、朱世杰等。他们当中的多数人受到刘徽的影响。楚衍是北宋数学家之首，他对于“《九章算术》、《缉古》、《缀术》、《海岛算经》诸算经尤得其妙。”② 这些数学著作可以说是一个“刘徽系统”，他的思想方法、成果以及后人的重要发展尽在其中。楚衍对刘徽的工作心领神会，“尤得其妙”。遗憾的是，楚衍没有著作流传下来，幸有学生贾宪著有《黄帝九章算经细草》一书行世，从其佚文尚可窥见刘徽的影响。刘益可能稍早于贾宪，而与楚衍同时代；蒋周要晚一些时间；他们都有数学著作，但都早已散佚。

据现有资料来看，刘徽对宋元数学的影响是多方面的，现综

---

① 李迪、冯立升．《谢察微算经》试探．数学史研究文集，第3辑．呼和浩特：内蒙古大学出版社、台北：九章出版社，1992，58～65

文中把“交质”、“杂揉”误排为“交货”、“杂操”。

② 《宋史》卷四六二“楚衍”。

合叙述如下：

首先，割圆术。刘徽割圆术思想方法在宋元时代有深刻影响和发展，沈括的“会圆术”即从割圆思想出发，反求弓形的弧长。元代的赵友钦，从讨论日径问题，进而论证前人各圆周率值何者为精密的问题，他认为“径一围三乃六角之田耳”，显然是来自刘徽的“圆田术”注。他又从圆内接正方形起算，倍增边数，进一步注意到：“其初之小方，渐加渐展，渐满渐实。角数愈多，而为方者不复为方而变为圆矣。”从而证明了 355/113 为“极精密”[①]。思路与刘徽的思想如出一辙。

其次，重差术。刘徽的重差术在宋元时期达到普及的程度，许多著作中都包括这方面的内容。杨辉作“海岛题解”一篇载于《续古摘奇算法》卷下之末，对重差术进行了解说。在秦九韶、李冶、朱世杰、赵友钦等人的著作中都有重差术的广泛应用。

第三，徽术。此“徽术”专指刘徽的圆周值 157/50。李籍在“音义”中说：“徽术：以五十乘周，一百五十七而一，即径；以一百五十七乘径，五十而一，即周。此术本于刘徽，故曰徽术。”朱世杰对“刘徽新术”作注说：“刘徽乃魏人也，立此新术以究圆之幽微。”[②]。赵友钦提到 3.14，但认为不及 355/113 精密。所有的数学家都知道“徽术”，可奇怪的是很少有人应用，只有杨辉例外，连著名的历法《授时历》都未用。

第四，正负术。刘徽对正负术的注文在宋元时期被接受和发展，朱世杰说：“按：《九章算术》注云：‘两算得失相反，要令正负以名之。正算赤、负算黑，否则以邪正为异”[③]。宋元时期广泛使用正负数，表示方法无一例外，全是刘徽方法的延续。

---

① 赵友钦：《革象新书》二卷本卷下“乾象周髀”。

② 朱世杰．算学启蒙・总括。

③ 朱世杰．算学启蒙・总括。其中“否则”各版本均误为“不则”。

第五，图形。刘徽大量使用图形的“出入相补”原理论证面积、体积和其他公式，对宋元数学的影响极其深远，“演段”术就是刘徽思想的发展。李冶说：“近世有某者，以方圆移补成编，号《益古集》，真可与刘、李相颉颃，余犹恨其闷匿而不尽发”，因而完成《益古演段》一书[①]。“某者”，据研究为蒋周，1080 年以前人[②]。与楚衍同时代的刘益是宋元使用图形研究数学问题的开创者，他的著作《议古根源》中大量使用“演段”术[③]。

第六，开方术和方程术。贾宪的“增乘开方法”是刘徽“开方”术的发展，从而完成了解高次方程的一般方法。“方程”问题也是宋元数学的重要内容，受刘徽的影响同样明显，在秦九韶、杨辉等著作中都有反映。

最后，名词术语。在宋元数学著作中，大量使用了刘徽所用的名词术语，例“廉”、“隅”、“赤算”、“黑算”、“类”、“幂”等等。

总之，刘徽对宋元数学的影响既全面，又深刻。是否可以在某种程度上说，宋元数学的高度发展受惠于刘徽呢？

第四阶段：由元代后期到清代乾隆中期，相当于 1330 年到 1770 年。在这 440 多年中，中国的数学研究处于低潮时期，数学著作不少，而高水平者不多。《九章算术》仅有孤本存在，研究者难得一见，大约惟有明代的吴敬见过一个抄本[④]。但吴敬并未接受刘徽多少有学术价值的思想方法，只采用了他的重差术等。程大位可能没有见过《九章算术》，在其著作中也有重差术问题，并有“海岛题解”一节，系来自杨辉算书。

---

① 李冶. 益古衍段·序。

② 徐义保. 对《益古集》的复原与研究. 数学研究文集，第一辑. 呼和浩特：内蒙古大学出版社、台北：九章出版社，1990，64～73

③ 杨辉. 田亩比类乘捷法，卷下。

④ 吴敬. 九章算术比类大全·序。

清代梅文鼎（1633～1721）是著名大数学家，著作等身，然而他未见过《九章算术》全书，仅见片断。实际上，他对刘徽的数学工作不了解。有些影响的迹象也是间接的。梅文鼎在提到古代数学家时说："自汉以后，史称卓茂、刘歆、马融、郑玄、何休、张衡，皆明算术。"[①] 未提到刘徽。康熙末年编撰的《数理精蕴》中在讲到割圆术时只说："刘宋祖冲之以圆容六边起算，元赵友钦以圆容四边起算。"[②]这是应当提到刘徽的地方而未提。这都说明，当时人们连刘徽之名都不知道，影响就难说了。

这是刘徽影响的第二个低潮时期。

第五阶段：由乾隆中后期到清末，相当于1770年到1911年。在这140年中，由于编辑《四库全书》而使《九章算术》、《海岛算经》等得以流传，刘徽之名也开始为人所知。由于时代的推移，从刘徽到这时已有一千五六百年，其影响主要表现在人们对他工作的研究和理解上。参加《四库全书》编辑工作的戴震是首先研究刘徽注的学者，他给《九章算术》所作之"订讹补图"中，大部分是对刘徽工作的研究。尽管他的工作存在不少问题，但开创之功不可磨灭。戴之后有李潢，对《九章算术》和《海岛算经》都作了"细草图说"。戴敦元评价说：李潢对"《九章算术》、《海岛算经》更多心得，……探赜索隐，钩深致远，胪名标目，咸式古训，撰《九章算术》、《海岛算经》细草图说共十卷，亦犹刘徽'析理以辞，解体用图'之意也。"[③] 李潢工作的主要内容在刘徽注方面，其所补之图大都是对刘徽所作的图形的复原，可以说是清代中期真正对刘徽注进行研究的数学家。不过，李潢对刘徽数学工作并没有多么深刻的认识。

---

① 梅文鼎．方程论・发凡。

② 《数理精蕴》下编卷十五"面部五・割圆"。

③ 戴敦元：《九章算术细草图说・序》。

清代能够对刘徽给出高度评价的大约只有焦循，他指出："刘氏徽之注《九章算术》，犹许氏慎之撰《说文解字》。士生千百年后，欲知古人仰观俯察之旨，舍许氏之书不可；欲知古人参天两地之原，舍刘氏之书亦不可。"因此"本刘氏之书，以加减乘除为纲，以《九章算术》分注而辨明之"，于是著《加减乘除释》一书①。不过阮元对此评价不太同意，他说：焦循"谓刘徽注《九章算术》与许叔重（慎）《说文解字》同有功于六艺，是岂尊崇之过当乎？"②

刘徽的割圆术、开方术、重差术等在清代中后期也都有影响。总的来说，影响程度超过前一阶段，是属于对他研究的起步时期。

第二节 现代对刘徽的研究

对刘徽的研究虽已有悠久历史，但是把他的数学工作选为研究对象还是近几十年的事情。从本世纪10年代起逐步发展，到90年代已形成研究高峰。现分以下四个阶段进行讨论。

第一阶段：从本世纪10年代到50年代初。在这约40年中，中外学者用现代方法开始对刘徽的工作进行研究，研究者有日本的三上义夫，美国的史密斯（D. E. Smith），中国的李俨、钱宝琮等。

1913年，三上义夫用英文出版了《中日数学之发展》一书。全书分为中国和日本两部分，中国部分19章，其中第3章为《九章算术》、第5章为《海岛算经》和"海岛"问题、第7章为中国古代数学家的圆周率，包括刘徽的割圆术和圆周率。1914年，三上义夫和史密斯用英文合著《日本数学史》，其中也包括刘徽的某些

① 焦循：《加减乘除释》卷一前言。

② 阮元：《畴人传》卷五"刘徽"。

工作。李俨于1916年发表了“中国数学史余彖”一文，两年后又发表长篇论文“中国数学源流考略”，其中评价刘徽之割圆术说：“魏人刘徽以六觚之面，割之又割，其求周径相与之率，得 $\pi=157/50=3.14$，号称徽术。其值虽视（刘）歆为弱，而其解法则诚可贵。徽又注《九章算术》(263年)，并自著《重差》（今名《海岛算经》）一卷，与赵爽之注《周髀》，并称一代杰作。”[①] 稍后，钱宝琮于1921年连续发表“九章问题分类考”和“方程算法源流考”，都讲到一些刘徽注的内容。

在二三十年代，对刘徽工作研究最多的当推三上义夫和李俨，他们在有关论著中都把刘徽放在重要位置。三上义夫于1926年发表“支那数学の特色”一文[②]，由林科棠译成中文，名为《中国算学之特色》，1929年收入《万有文库》等书。他在第五部分中说：“《晋书·律历志》云：‘魏陈留王景元四年，刘徽注《九章算术》。’可知徽为三国末之人，即当于西历二六三年。”“《海岛算经》，魏刘徽撰，本称《重差》，因开卷即言海岛测量之问题，故唐时称《海岛算经》。其撰述之事，见刘徽《九章算术》注之序中。盖此书与《九章算术》之注，于观察三国末之算学知识上极为重要也。”在第六部分中，三上义夫又指出刘徽对球体积的研究，改圆柱为“合盖”，以为

合盖之积：球之体积＝正方形之面积：圆面积。

虽然刘徽未能求出“合盖”之体积，但是后来“祖冲之研究合盖体积之算法，使用刘徽之比例而得圆体积，其能成功，不外追得刘徽之先踪耳。”更进一步评价说：“此一事，可谓中国算学上几何学的处理方法之最高发达；苟与希腊阿基米德（Archimedes）之积分方法及其所言与外接圆柱之关系，一比较研究之，亦一趣事

① 李俨. 中国数学源流考略. 北京大学月刊，第一卷第四号，1919，1～19

② 〔日〕三上义夫. 支那数学の特色. 东洋学报，1926，(15)(16)

也。”又讲述了刘徽的方程新术、勾股术等研究。在第八部分，他还讲到了刘徽的割圆术和对圆周率的研究等。

1931 年 9 月，三上义夫在日本数学物理学会上做了一次长篇讲演，论述关孝和的业绩和京坂（京都、大坂）数学与中国算法的关系及比较[①]，全文包括绪论、结论在内共 32 节，其中有二节半讲刘徽的工作，即

第 28 节　魏刘徽之圆的算法。

第 29 节　魏刘徽之圆锥等的算法。

第 30 节　刘徽与祖暅之之球的算法。

第 28 节主要是讨论刘徽用割圆术推求圆周率值的问题，指出：刘徽“把圆内接正六边形逐渐倍增边数求其面积。根据刘徽的话，可知已有了极限思想”。他认为，刘徽在求出了所谓徽率 157/50 之后的文字仍然是刘徽注文。

第 29 节主要是讨论刘徽的阳马术，并补图加以说明，指出：刘徽用无限等比级数进行立体体积证明的尝试。

第 30 节讨论刘徽和祖暅之关于球体积的算法，但是祖暅之所用的方法正是刘徽所提出的而稍加变通。祖暅之对刘徽的批评亦稍欠当。

李俨在《中国数学大纲》上册设专章讲述刘徽的数学工作。章名叫“刘徽学说”，分为“刘徽九章注”、“刘徽割圆术”和“刘徽重差术”三节[②]。在《中国算学史》、《中国算学小史》等著作中也都有类似章节。

美国的卡约利（F. Cajori），法国的赫师慎（L. vanHee），日本的小仓金之助等都介绍过刘徽和他的某些成就。赫师慎把《海

---

① 〔日〕三上义夫. 关孝和の业绩と京坂の算家并に支那の算法との关系及び比较. 东洋学报，1933～1934（20）（22）

② 李俨. 中国数学大纲，上册. 上海：商务印书馆，1933，29～35

岛算经》译为法文，介绍于西方。日本的加藤平左工门出版了一部篇幅很大的著作《行列式及圆理》，其第二部分“圆理”第一编第二章中根据三上义夫和李俨的工作，较详细地讨论了刘徽的割圆术和球积的研究[①]。钱宝琮也讨论过刘徽的割圆术，认为祖冲之的精密圆周率值的求法可能是刘徽的继续[②]。

第二阶段：从 50 年代初到 70 年代初，大约 20 年左右。这个阶段对刘徽研究的特点出现专题研究，这在以前是少见的。此处所说的专题研究系指冠以“刘徽”之名的独立论文，而不是仅在论著中包括刘徽。第一篇这样的文章出于许莼舫之手，题目是“刘徽在数学上的三大贡献”，1953 年 10 月发表于《科学大众》。这是一篇通俗性的文章。1954 年，杜石然发表了题为“古代数学家刘徽的极限观念”的文章[③]。五年以后，有李迪发表的题为“刘徽对分数理论的研究”一文[④]。1960 年李迪又发表一篇全面介绍刘徽的文章[⑤]。

在此期间，中国数学史界展开了一次关于 $\pi=3.1416$ 的求出者是刘徽还是祖冲之的小规模辩论，从 1953 年到 1957 年的 4 年间，共发表专题或相关的论文有 6 篇，参加的人有余宁生、钱宝琮、孙炽甫、李迪、萧而广和励乃骥，大都提出了自己的理由。但是，直到 40 年后的现在（1995 年），分歧看法仍然没有消除，虽然不见有专门论文发表，而两种看法还不时在有关论著中反映出来。

关于刘徽注《九章算术》的年代，人们一方面承认是在 263 年，另一方面有人认为 263 年并未注完，入晋以后继续作注。在这种

---

① 加藤平左工门. 行列式及圆理. 东京开成馆，1942，第二部分，5～16

② 钱宝琮. 中国算学史，上册. 历史语言研究所，193，58

③ 杜石然. 中国数学家刘徽的极限观念. 数学通报，1954 (2)，1～2

④ 李迪. 刘徽对分数理论的研究. 中学数学，1959 (5)，1～2

⑤ 李迪. 伟大的数学家刘徽. 数学教学月刊，1960 (1)，29～31

矛盾的情况下，1963 年有三人发表专门文章纪念刘徽注《九章算术》1700 周年。他们是沈康身、梅荣照与何章陆。这三篇文章都较详细论述刘徽的成就与贡献。沈康身的文章分为四部分①：圆周率、球积公式、数学在测量方面的应用、在编写数学用书方面的先进方法，最后与国外进行了比较。梅荣照的文章也分为四部分②，但与沈康身的不同是：刘徽的时代及《九章算术》注的历史背景、刘徽《九章算术》注、刘徽《九章算术》注的几个创作、刘徽的工作在数学发展史上的地位。何章陆的文章分为两部分③：第一部分《九章算术》的成就、刘徽的贡献。第二部分专讲刘徽的工作，包括明确概念、对原术加以解释说明、对某些原术作了证明、圆周率的研究（包括对球积的研究）、对《九章算术》原著提出了改进和补充。这批纪念文章各有千秋，但合起来对刘徽的成就和贡献讨论的比较全面了。使人们对刘徽的认识提高了一步。

在这一时期，前苏联的学者对刘徽研究、介绍较多，尤什凯维奇（Ющкевпч，А. П.）、别辽兹金娜（Берёзкина，Э. И）、奇斯佳考夫（Чистяков，В. Д）等人的论著中都包括了刘徽的工作。别辽兹金娜把《九章算术》原文译成了俄文，但在注解时大量引用了刘徽注④。

中国学者对刘徽的研究还反映在其他论著中。钱宝琮在校点《九章算术》时，对刘徽注进行了一次彻底的校勘，这是李潢以后

---

① 沈康身. 纪念刘徽注《九章算术》1700 周年（263～1963）. 北京：数学通报，1963（5），6～9

② 梅荣照. 刘徽《九章算术》注的伟大成就——纪念刘徽《九章算术》注创作 1700 周年.《科学史集刊》，1963（6），1～10

③ 何章陆.《九章算术》今读——纪念刘徽注《九章算术》一千七百周年. 浙江师范学院学报（自然科学版），1963（1），1～10

④ Берёзкина Э. И.，Примечаниа к《Математике в Девяти кнпсах》，Историко～математические исслерованиа. Вып. X（1957）. с. 514～584.

的首次校勘工作。由他主编的《中国数学史》一书也有刘徽专节。李迪讨论了刘徽的十进小数，沈康身讨论了刘徽的间接测量，杜石然研究了刘徽的“方程”，程廷熙讨论了刘徽的弧田术，等等。在进入1966年以后，中国的研究完全停止了，一下子前后过了差不多十年才又开始。

第三阶段：从70年代初到80年代末，差不多20年。这个阶段对刘徽的研究达到新的高度，刘徽在国际上的地位得到确认。首先是，中国人还在忙于“文化大革命”，已是精疲力竭的时候，而美国出版的世界科学家传记中将刘徽立传收入其中①，作者澳大利亚的何丙郁（HoPeng Yoke）撰写了长篇的“刘徽”条目。条目系按《九章算术》各章依次讨论了刘徽的成就，最后是对《海岛算经》的介绍。

从1975年起，丹麦的华道安（D. B. Wagner）一连发表了四五篇有关刘徽数学成就的论文，有的还被译成了中文②。这些论文基本上都是对刘徽几何研究的研究，虽然只有少数的译成中文，但是中国学者从各种渠道有所了解。当时中国学者正处于对中国数学史研究不知所措之际，华道安的工作不啻是一剂清醒剂。从此很多人对《九章算术》和刘徽发生了很大兴趣。当然，这种兴趣的兴起，也有自身的原因。1975年吴文俊（用笔名顾今用）发表了一篇文章③，对中国古代数学给了很高的评价，1976年10月在北京召开的“中国数学史座谈会”等都起了推动作用。还有，原

---

① Ho Peng－Yoke. " Liu Hui", Dictionary of Scientific Biography, Vol. VIII. 1973, Charles Scriner's Sons, pp. 418～425.

② 唐·布·瓦格纳著、郭书春译：“公元三世纪刘徽关于锥体体积的推导”，《科学史译丛》1980年2期，第1～15页。原文载“Historia Mathematica” Vol. 6. No. 2, pp. 164～188.

③ 顾今用（吴文俊）. 中国古代数学对世界文化的伟大贡献。数学学报，18卷，1975. 18～23。

来处于“地下”的研究工作，也“浮”了上来，白尚恕的工作即属此类。中国学者严敦杰、郭书春、梅荣照、白尚恕、李迪、沈康身、李继闵都在各种角度上对《九章算术》和刘徽进行研究，其中郭书春、李继闵几乎是以此为唯一研究方向。

这一时期的研究成果相当可观，在国内有：

白尚恕.《九章算术》注释. 北京：科学出版社，1983

吴文俊主编.《九章算术》与刘徽. 北京：北京师范大学出版社，1982

《科学史集刊》第 11 辑，北京：地质出版社，1984。本辑收入 13 篇论文，其中有 8 篇为研究刘徽的论文。

从 1973 年 1 月到 1989 年 12 月，据不完全统计，中国学者（包括台湾学者在内）总共发表有关刘徽及相关文章 100 篇左右，平均每年接近 6 篇。

上述华道安工作之后，国外对刘徽的研究和介绍还在继续，如美国的斯维兹（F. J. Swety），德国的福格尔（K. Vogel），新加坡的兰丽蓉（Lam Lay-Yong），法国的马若安（J. -C. Martzloff），前苏联的别辽兹金娜，日本的薮内清、川原秀城、武田时昌等等。其中川原秀城于 1978 年在翻译《九章算术》时，首次把刘徽注译成了中文以外的文字（日文）[①]。

这一阶段，可说是研究刘徽的兴旺时期，但有些工作还在继续，并没有全部结束。

第四阶段：由 1990 年 1 月到 1994 年 12 月，共五年。这五年是研究刘徽的高峰期，发表的论著之多是前所未有的。

1991 年 5 月，在北京师范大学召开了“《九章算术》暨刘徽学术思想国际研讨会”，有来自马来西亚、澳大利亚、日本、美国

① ［日］川原秀城译. 刘徽注九章算术. 川原秀城.《九章算术》解说. 载《科学の名著》2“中国天文学・数学”. 朝日出版社，1978，45～272，47～274。

和中国海峡两岸的学者50名出席，会上报告和宣读论文49篇。

在这五年中，国内外共出版有关专著和文集8种，它们依次是：

1. 郭书春. 汇校《九章算术》. 沈阳：辽宁教育出版社，1990

2. 白尚恕.《九章算术》今译. 济南：山东教育出版社，1990

3. 李继闵.《九章算术》及其刘徽注研究. 西安：陕西人民教育出版社，1990。

4.《九章算术》暨刘徽学术思想国际研讨会论文集. 北京师范大学学报（自然科学版），1991年增刊（3）

5. Swety，Frank J. The Sea Island Mathematical Manual：Surveying and Mathematics in Ancient China，1992. The Pennsyevania State University Press。

6. 郭书春. 古代世界数学泰斗刘徽，济南：山东科学技术出版社，1992

7. 吴文俊（主编）. 刘徽研究. 西安：陕西人民教育出版社、台北：九章出版社，1993

8. 李继闵.《九章算术》校证. 西安：陕西科学技术出版社，1993

此外，还有些已经脱稿、尚未出版，或在进行中的有以下工作（确切知道的）：

1. 沈康身.《九章算术》导读

2. 郭书春，K. Chemla 合译.《九章算术》法译本

3. 李继闵.《九章算术》译注与导读。由于李继闵已于1993年9月10日去世，余下的部分由他的学生续作。

4. 沈康身等.《九章算术》英译本

包括各论文集的论文在内，据不完全统计国内外用各种文字发表的有关刘徽及其工作的研究论文共约100篇，平均每年20篇左右，是上阶段的3倍还多。真是盛况空前！论文作者中百分之

八十为中国大陆学者，其他有法国、日本、马来西亚、澳大利亚、美国、俄罗斯等国家和台湾地区的学者。

可以预见，对刘徽和《九章算术》的研究，尽管今后还会时起时伏地继续下去，但是高潮（和本阶段相当的情况）不可能再出现。

第三节 刘徽在数学史上的地位

刘徽在数学史上占有怎样的地位呢？在前面的两节中，已经提到一些人对他的评价。实际上，通过人们对他的大量研究、介绍，亦能反映出他的历史地位。到现在为止，对中国历史上的数学家的研究，刘徽占首位。

下面首先有选择的援引一些学者对刘徽地位和评价的话。

沈康身在他的纪念文章中，把他举出的刘徽的三项主要贡献与外国相应的工作进行了比较，而刘徽的成果更优越，有的早于外国一千多年。过了差不多30年，沈康身给出了更全面的评价，他说："刘徽是中国第一代知名数学家：刘徽才华出众，他的数学工作有划时代的意义"，"《几何原本》重在几何、数论，而《九章算术》及刘注在算术、代数方面远远凌驾于《几何原本》之上。刘徽对数学命题力主言必有据，立论严谨，无懈可击。"但是注意到："如果中算家沿着刘徽指引的治学方向前进，中华肯定也会产生自己的演绎数学。作为刘徽数学思想方法的精髓的言必有据，为什么没有为大多数中算家继承和发展？"这是一个有趣而重要的问题①。

梅荣照在他的纪念文章中说："刘徽是我国古代一位非常伟大

① 沈康身．刘徽生平、数学思想渊源及其对后世的影响试析．参见：刘徽研究．西安：陕西人民教育出版社、台北：九章出版社，1993，79～86。

的数学家，他所撰的《九章算术》注十卷与《九章重差图》一卷，是我国数学史上划时代的著作。”还指出：“刘徽的工作在世界数学史上也占有重要的地位。刘徽从事于数学理论研究比希腊学者为迟，但他的成就却超过同时代数学家。”“刘徽在《九章算术》注的伟大历史意义也正是由于这种独特风格的理论系统打下了坚实的基础。”他在另一篇文章中更进一步指出：刘徽“是整个中国古代数学理论的奠基人，因此认真研究和弄清他的数学证明，对研究中国数学史是十分有意义的。”[①]

钱宝琮说：“刘徽是我国古代杰出的数学家。”[②]

何丙郁在他的“刘徽”条中说：刘徽的著名数学著作“《九章算术》注对中国数学有深远的影响超过1000年。他的另外的重要著作，为《海岛算经》。”

薮内清引三上义夫的话说：刘徽是“古今东西数学界的一大伟人”，并且把刘徽的工作与外国进行了对比，他作结论说：“阿基米德和刘徽相隔差不多有五百年，而圆周率的算定和球的体积计算存在着奇妙的类似。”[③]

华道安从数学证明的角度对刘徽的工作做了评价，他说：“刘徽的推导建立在一般未明确说明的一些假定基础之上，而他显然认为，这些假定是明显无误的。”又说：“刘徽严密性的标准是很高的。刘徽从未犯循环推理的错误：他也从没有企求数理逻辑的还有神秘的概念；只是在一种情况下，他偏离了我们做为严格数学而接受的考虑。”华道安就刘徽对阳马术的研究所做的评论是恰当的：“我们可以想象把阳马分割为其体积为已知的各部分的多次

① 梅荣照·刘徽的勾股理论．参见：科学史集刊，第11期．北京：地质出版社，1984，77～95。

② 钱宝琮·九章算术提要．载《算经十书》校点本上册．北京：中华书局，1963，85

③ ［日］薮内清·中国の数学ル天文学．载：科学の名著（2）．1～44

尝试所遭受的挫折。他不知道德恩的结果①，在开头，他一定曾确信，用推导其他物体体积的同样方式来推导出阳马的体积是可能的。令人惊奇的，并且是他严密标准的一个明确标志，是他没有满足于处理尺寸相等的情况，而是发现，必须明确地处理一般情况，并且，他成功地发现了处理问题的方法，这是他数学天才的一种表现。”华道安还注意到刘徽工作的许多弱点，刘徽又受到《九章算术》的限制：“刘徽概念上的体系足以处理例如比他在他的注中实际考察的更加广泛得多的一系列几何体。如果他感到需要把他的方法推广到固有的最大限度，他肯定会给传统数学做出更大的贡献。”②

白尚恕指出：“刘徽在《九章算术》注解中，‘析理以辞，解体用图’，不但给出明确的概念，而且还有很多创造发明。从而取得了不可磨灭的功绩。可以看出，刘徽在数学方面的成就是十分伟大的、十分辉煌的。他不愧是我国古代一位杰出的布衣数学家。”③更进一步评价说：“刘徽不愧是中国古代一位杰出的数学家，……刘徽才华出众，光彩夺目，堪为一代学人的楷模。”④

吴文俊多次对刘徽进行了评价，高度称赞他的数学成就和思想。早在1980年他就指出：“《九章算术》的刘徽注是数学上的又一伟大成就。刘徽注不仅提出了丰富多采的创见与发明，并以严密的数学用语描述了有关数学概念，对《九章算术》中的许多

---

① 德恩，即Dehn，Max Wilhelm (1878～1952)，美国数学家，1900年由希尔伯特刚提出的23个问题的第3个问题便由他解决了。这问题是：存在两个等底等高的四面体，它们不可能分解为有限个四面体，使这两组四面体彼此相等。德恩给出了肯定的答案。

② 科学史译丛. 1980 (2)：1～15

③ 白尚恕.《九章算术》注释·前言. 北京：科学出版社，1983

④ 白尚恕. 刘徽数学思想. 刘徽研究. 西安：陕西人民教育出版社、台湾：九章出版社，1993，63～78

结论给出了严格证明。他所采用的证明方法，不仅有综合法、分析法，而且有时还兼用反证法。他沿袭我国古代的几何传统，使之趋于完备，使之具有独特风格的几何体系。刘徽的发明、创造对后世人有所启发，即使对于现今数学也有不少借鉴之处。从对数学贡献的角度来衡量，刘徽应该与欧几里得、阿基米德等相提并论。"[①] 差不多过了10年，吴文俊又指出：《九章算术》和刘徽注"是数学在中国最早、最完整的历史记录。《九章算术》与刘徽的《九章算术》注，是研究数学在中国的历史和现状的钥匙。""《九章算术》与刘徽的《九章算术》注所贯串的机械化思想，不仅曾深刻影响了数学的历史进程，而且对数学的现状也正在发扬它日益显著的影响。它在进入21世纪后在数学中的地位，几乎可以预卜。"[②]

郭书春对刘徽的评价，他说："刘徽赋予了我国古代数学以全面性、客观真理性和逻辑性等一个理论体系所必须具备的几项要素。可以说，我国古典数学在刘徽的《九章算术》注出现后才真正形成了自己的理论体系。""而刘徽注则是以演绎逻辑为主，兼之以归纳逻辑的著作，它为《九章算术》的框架注入了血肉和灵魂，成为真正的数学科学，它的出现，标志着中国古典高等数学完成了由感性向理性的飞跃，由或然性向必然性的升华。"[③] 他还说："刘徽是当之无愧的世界数学泰斗。他的成就和思想是应当大书特书的。"并以《古代世界数学泰斗刘徽》为书名出版了长达32万多字的专著。郭书春也指出了刘徽数学工作的不足。

李继闵对刘徽也给出了很高的评价，他说："刘徽对于中国古

---

① 吴文俊为白尚恕《〈九章算术〉注释》所写之序（1980年12月17日）。

② 吴文俊为李继闵《〈九章算术〉及其刘徽注研究》所写的序言（1990年2月2日）。

③ 郭书春. 汇校《九章算术》. 沈阳：辽宁教育出版社，1990，64，66

代数学的贡献是无与伦比的。他开辟了我国古代数学理论化的道路，是传统数学理论的奠基人。”“刘徽对于古代数学理论的奠基性贡献，更重要的表现在他对数学基本概念与原理的概括与提炼，以及对数学理论的清理。在这方面，既有他对前人工作的总结，也有他本人所作的独创。”刘徽“以其深邃的思想和高度的抽象与概括能力，全面地完成了古代《九章算术》的理论奠基工作。其中如割圆术、刘徽原理、牟合方盖、重差理论等发明创造，都是前无古人，永载史册的。”①

李迪认为：“在刘徽的时代，很难在世界范围内找到一个能够和刘徽相比的数学家。”② 又说：“刘徽是中国历史上最伟大的数学家。”③ 他在讨论了刘徽的几何逻辑系统之后指出：“刘徽的逻辑体系有很大的局限性和缺陷，这完全是由《九章算术》所决定的。该书的中心问题是计算，其中对几何问题归根到底是计算面积和体积。刘徽无法跳出这个圈子，就是他以后的中国数学家不仅和他一样，而且绝大多数数学家在这方面呈现出极大的倒退。实在是限制了刘徽在逻辑上的发挥，假如他要自己写一本几何学方面的著作，尽管不能跳出计算这个圈子，也一定会建立一个较为明确而完善的（计算）几何逻辑体系。”④

澳大利亚的郭树理（J. N. Crossley）和伦华祥（A. W. -C. Lun）于1991年在北京的一次国际会上报告了题为“The Logic of

---

① 李继闵.《九章算术》及其刘徽注研究。西安：陕西人民教育出版社，1990，30～33

② 李迪. 刘徽传琐考. 刘徽研究. 西安：陕西人民教育出版社、台北：九章出版社，1993. 43～62

③ 李迪. 刘徽的数学思想. 科技史文集，第8辑“数学史专辑”. 上海：上海科学技术出版社，1982，67～78

④ 李迪. 刘徽的几何成就与几何逻辑系统. 刘徽研究. 西安：陕西人民教育出版社，台北：九章出版社，1993，253～268

Liu Hui and Euclid"的论文,[1]后来又在此基础上进行修改、形成另一篇内容类似的论文。[2]在这两篇论文中都对刘徽的逻辑给出了评价，中心的意思是：刘徽对棱锥体积的推导简化为对一特例求解，并由此得出一般性结论。刘徽的证明是构造性的。他们认为如果把欧几里得的一般方法和刘徽的实用方法结合在一起是极为有用的。

以上所引的材料，充分反映出刘徽的学术地位，当然还有许多资料对刘徽给出了某种评论，但有上面的资料已足以能说明问题了。可以看出：刘徽在20世纪的最后一二十年里得到了这样高的评价,以致于世上最美好的赞美词句几乎全部用到他身上了,到了再无什么赞美词句可用的程度。

刘徽的确是数学史上的一位伟人。如果把中国历史上（不包括20世纪以来的）的数学家按成就和创造性的大小排一个队的话，刘徽应当是第一位。这是根据目前已经有的资料所下的结论。一位值得同刘徽相比的人物是祖冲之，他的《缀术》在唐代明算科规定的学习年限比《九章算术》加《海岛算经》的年限还长，又深奥难懂，其水平可能超过刘徽《九章算术》注和《海岛算经》。但因《缀术》早已失传，无法进行比较，所以只能这样安排了。

把刘徽与国外数学家相比较，如上面所引的资料中，人们常常和阿基米德、欧几里得等的某些方面对照。可是一个基本事实是：刘徽比他们不是早几十年、一二百年，而是差不多都早五百年以上！就公元3世纪来说，只有希腊后期的丢番图（Diophantus)可以和刘徽相比，但是丢番图的成就仅限不定方程等领

---

① 中译文载于《刘徽研究》，第269～281页。

② Clossley, J. N. and Lun, A. W. —C., The Logic of Liu Hui and Euclid as Exemplified in Theie Proofs of the Volume of a Pyramid. Philosophy and the History of Science, vol. 3, No. 1, 1994, pp. 11～28

域，远不如刘徽的广博而深刻。

总之，刘徽在数学史上的地位已经确立，并被列入世界大数学家之林。

第 三 编

刘徽在几何学方面的成就

中国古代传统数学具有悠久的历史，而且具有丰富的内涵；这是世界学术界所公认的。中国古代传统几何学，它的形成也是非常古远的，其内容非常丰富；中国古代几何学的内涵主要包括三个方面：即推求平面图形的面积，推求立体图形的体积，推求线段的长度。也就是说，主要是用计算方法解决一些有关问题，但是，在中国古代传统几何学中，缺少对几何元素之间位置关系，性质关系的研究，而对几何元素之间位置关系，性质关系的论述，则蕴藏在算法之中，而很少形成文字，所以研究中国古代几何学的理论，必须从字里行间下工夫，否则就无所收获。至于概念，中国古代学人对一些几何的概念则多采用约定俗成的方式，很少给以确切的文字描述，因此，对一些几何概念的探讨，必须深切体会其真正的涵意。

三国时代的数学家刘徽，在前人基础上，对中国古代几何学理论方面不但具有深远的造诣，而且还有许多创造发明，对于一些几何概念也给予确切的描述。我们将分别加以论述。

第一章　刘徽对面积理论的论说

第一节　古代对面积概念的认识

在古代，为了确定农业的收成，摊派税收，遣派徭役，必需丈量土地，而丈量土地则对面积产生了认识，可以说在中国古代对面积的认识是产生自丈量土地；当对面积的认识提高了以后，便用“幂”字或“积”字来表示；古代最早用“幂”字表示面积概念的，要算是西汉末年的刘歆。

公元9年，王莽为了统一度量衡，便命刘歆制造标准量器，颁行天下，在王莽铜斛的斛铭称：“律嘉量：斛，方尺而圆其外，庣旁九厘五豪，冥百六十二寸；深尺，积千六百廿寸。容十斗”。其斗铭为：“律嘉量：斗，方尺而圆其外，庣旁九厘五豪，冥百六十二寸；深寸，积百六十二寸。容十升”。王莽铜圆升铭为：“律嘉量：升，方二寸二分而圆其外，庣四厘八豪，冥八寸一分；深二寸，积六千二百分。容十合。始建国元年正月癸酉朔日制。”其中所用的“冥”字就是“幂”字的异体字，而冖字是幂字的古体字，如《说文解字》称：“冖，覆也。从一下垂也。”其中所说幂字的原意，是指遮盖祭品或器物所用的方形布；刘歆就用原意为遮盖物品的“幂”字第一次表示面积，其次，刘徽用“幂”字表示面积。至于“积”字，其原意是积累的意思，古代多用于数量的积累；《九章算术》及刘徽则用以表示两数或多数相乘的结果，也用于表示面积。可是到了唐代，天算学家李淳风则对“积”、“幂”提

出异议，他于《九章算术·方田》经文“方田术曰：广纵[1]步数相乘得积步”及刘徽注文“此积为田幂。凡广纵相乘谓之幂”下，注称：

“经云‘广纵相乘得积步’，注云‘广纵相乘谓之幂’，观斯注意，积幂义同。以理推之，固当不尔。何则？幂是方面单布之名，积乃众数聚居之称。循名责实，二者全殊。虽欲同之，窃恐不可。今以凡言幂者据广纵之一方；其言积者举众步之都数。经云‘相乘得积步’，即是都数之明文。注云‘谓之为幂’，全乖积步之本意。此注前云‘积为田幂’，于理得通。复云‘谓之为幂’，繁而不当”。

李淳风认为，“积”与“幂”的意义不同，不能混为一谈。其中“幂”是由方形的一边伸展成的面的名称，而“积”则是用单位量得的总数，也即众数相乘积累的总称；循名责实，二者意义全然不同。如将二者混同起来，则不敢苟同。李淳风注又进一步说，凡说“幂”者，是指根据长或宽伸展成的图形；凡说“积”者，是指众步的总数；一指形，一指数，二者是迥然不同的。李淳风为了使不同的概念有明确的区分，他的意见是正确的，是进步的表现，但是，即使他自己也没有严格遵守他的意见。有人认为李淳风的意见是不理解刘徽面积概念的实质性与深刻性，其实，李淳风的看法是有可取之处的，既有一定的实质意义，又有一定的深刻意义。

李淳风认为，“幂”是由长边或宽边伸展成的，也就是线动成面的意思，而“积”则是度量单位的总称。并不认为幂代表着“方布”，也不认为“布”是由经线或纬线交织而成的，“幂是方面单布之名”之“布”字，是动词，是伸展的意思，并不是名词，不是由经线或纬线交织成的“方布”；其中“方面”是指方形的边，

---

① 此“从”与“纵”通，下同。

而“单布”就是由一边伸展成的面。因此，还可以由“凡言幂者据广中之一方”一语，得到佐证。

由于李淳风的意见没有得到实施，历代对“幂”、“积”的理解和用法也不一致，随着时代的推进，“幂”、“积”的含意也得到了扩充。虽然“幂”、“积”在现代具有更广泛的涵意，但研究《九章算术》及刘徽的论述，仍应按照其原意来理解。

第二节 刘徽的“出入相补”原理

在前人的基础上，为了推证有关图形的面积或体积，刘徽创造了“出入相补”原理。所谓“出入相补”原理，就是一般所说的“割补法”，也即“以盈补虚法”。刘徽虽然没有给予“出入相补”原理的具体记载，但从整个刘徽的注文来看，不难发现刘徽对此有清晰的认识。若表示为现代语言，正如吴文俊教授在《出入相补原理》一文中指出：

“一个平面图形从一处移置他处，面积不变。又若把图形分割成若干块，那么各部分面积的和等于原来图形的面积，因而图形移置前后诸面积间的和、差有简单的相等关系。立体的情形也是这样。”

通过《九章算术》及刘徽对面积的记载可知，是以长方形的长乘宽等于其面积作为基本原理的；并把平面图形的钢体性移动作为公法的；也认为平面图形具有可加性。从而形成了“出入相补”原理，但是，很难发现具有等价于卡瓦列利(B. Cavalieri，1598～1647）于1629年所发表的公理的意念，即“两个等高的平面图形，如果等高处的水平截线处处相等，则它们的面积相等”。同时在《九章算术》及刘徽对各种面积算法的论述中也未发现有所应用。所以，挖掘古人对面积概念中所蕴藏的理论是十分困难的。

今将《九章算术·方田》有关直线型平面图形的面积算法简

介如下：

一、圭田

《九章算术·方田》第25，26两问分别为：

(25) 今有圭田，广十二步，正纵二十一步。问：为田几何？

答曰：一百二十六步。

(26) 又有圭田，广五步二分步之一，纵八步三分步之二。问：为田几何？

答曰：二十三步六分步之五。

术曰：半广以乘正纵。

在术文之下，刘徽注称：

"半广者，以盈补虚为直田也。亦可半正纵以乘广。按半广乘纵，以取中平之数。故广纵相乘为积步。亩法除之，即得也。"

所谓"圭田"，用现代术语来说，就是等腰三角形的田地，也即等腰三角形。若按字意而论，"圭田"是一象形名称，其中"圭"字就是古人佩带的一种玉器，或祭祀、丧葬所用的礼器。如《考工记》记载有"镇圭"，"信圭"，"谷圭"，"琬圭"等。李籍《九章算术音义》则称："圭田者，其形上锐，有如圭然"。在《九章算术》、《五曹算经》、《夏侯阳算经》中，虽然都记载有圭田的问题，而未配有图形，但在杨辉《续古摘奇算法》、朱世杰《算学启蒙》、程大位《算法统宗》中，却是既有圭田的问题，也配有等腰三角形的图形，即使朱世杰《四元玉鉴》中所设的圭田，经考证也是等腰三角形。根据认识规律来看，由宋、元、明的有关著作进行逆推，《九章算术》所指"圭田"当为等腰三角形，则无疑问；如果认为《九章算术》中的"圭田"是泛指一般三角形，似无根据。

术文所说"半广以乘正纵"，是给予圭田面积算法，即：

圭田面积＝1/2×广×正纵。

按刘徽注文所说，也可得：

圭田面积=1/2×正纵×广。

刘徽所说“半广者，以盈补虚为直田也。亦可半正从以乘广”。如图所示，这就是利用“出入相补原理”，把等腰三角形通过分、割、移、补使之成为长方形，按长方形面积算法计算。其中所说“广”是指等腰三角形的底，而“正纵”是指等腰三角形的高，刘注所说“中平之数”，就字面而论，当是平均数；但实际上也就是

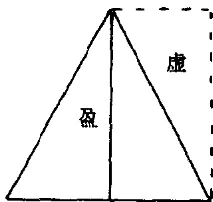


图 3·1·1

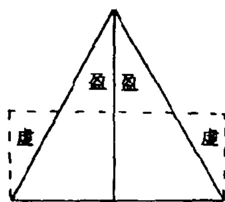


图 3·1·2

取等腰三角形左边半底与右边半底和的一半的意思。如《九章算术·商功》第1问刘徽注所说：“并上下广而半之者，以盈补虚，得中平之广”一样。也就是取两数和的一半的意思。刘徽既然把等腰三角形变为长方形，便按长方形面积算法，从而证明了“圭田”面积的算法。

二、邪田

《九章算术·方田》第27，28两问为：

(27) 今有邪田，一头广三十步，一头广四十二步，正纵六十四步。问：为田几何？

答曰：九亩一百四十四步。

(28) 又有邪田，正广六十五步，一畔纵一百步，一畔纵七十二步。问：为田几何？

答曰：二十三亩七十步。

术曰：并两邪而半之，以乘正纵若广。又可半正纵若广，以并，亩法而一。

在术文之下，刘徽注称："并而半之者，以盈补虚也。"

所谓"邪田"，就是直角梯形。其中"邪"字即是"斜"字，是针对"正"来说的，"斜田"是与"直田"相对的，又由箕田术刘徽注"中分箕田则为两邪田"来看，刘徽也认为"邪田"是直角梯形，但是，清人李潢《九章算术细草图说》却认为是一般梯形。这种见解根本不符合《九章算术》及刘徽的原意。虽然邪田术文中有"并两邪而半之"一语，但并不能作为一般梯形的凭证。因为：如果理解"两邪"为直角梯形的两底，则术文所说的算法是正确的；如果理解"两邪"为梯形的两腰，则术文所论算法是错误的，不但无法进行计算，而且经文也未给予"两邪"的数据；所以把"邪田"理解为一般梯形是没有道理的。也没有什么依据。如果把下两问"箕田"理解为等腰梯形，而把"邪田"理解为一般梯形，这不仅误解了《九章算术》及刘徽的原意，也违反了先特殊后一般的认识规律。把"邪田"当作一般梯形是不可取的。到了宋、元时代，多不用"邪田"一名，而改称为梯田或半梯田的名称。可见随着时代的进展，数学的名称也得到了变迁。

《九章算术》经文所说"一头广"或"一畔纵"可能都是指直角梯形的底，由于其位置不同，而名称亦异，古代一般称东西为广，南北为纵，称上、下为头，称左、右为畔；"一头广"、"一头广"当指直角梯形的上、下底；而"一畔纵"、"一畔纵"当指直角梯形的左、右底；其中"正纵"或"正广"都是指高；术文之"并两邪而半之"之"两邪"，当是指直角梯形的两底。

按术文可知"斜田"面积算法为：

斜田面积＝1/2×(一头广＋另一头广)×正纵

＝1/2×(一畔纵＋另一畔纵)×正广；

又可　斜田面积＝1/2×正纵×(一头广＋另一头广)

＝1/2×正广×(一畔纵＋另一畔纵).

刘徽所说"并而半之者"，显然是"并两斜而半之"的省语，

而"以盈补虚"即是用出入相补原理给予的证明，如图所示，刘徽是取直角梯形两底和的一半，使之化为长方形，用以证明前一算法；而后一算法的证明，当是取直角梯形高的一半，使之化为长方形。并不是取两底差的一半，以盈补虚，使化为直田的。我们以为刘徽就是这样用出入相补原理证明了"邪田"的面积算法。

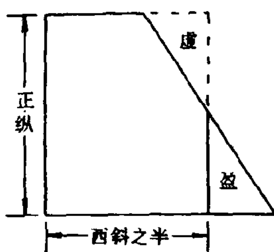


图 3·1·3

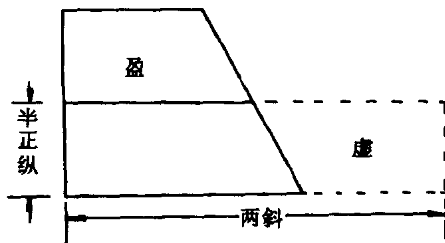


图 3·1·4

三、箕田

《九章算术·方田》第 29，30 问分别为：

(29) 今有箕田，舌广二十步，踵广五步，正纵三十步。问：为田几何？

答曰：一亩一百三十五步。

(30) 又有箕田，舌广一百一十七步，踵广五十步，正纵一百三十五步。问：为田几何？

答曰：四十六亩二百三十二步半。

术曰：并踵舌而半之，以乘正纵。亩法而一。

在术文之后，刘徽注称：

"中分箕田则为两邪田，故其术相似。又可并踵舌，半正纵以

乘之。”

“箕田”是一象形名称，就字意而论，当是簸箕形状的田地，也就是等腰梯形的田地，或等腰梯形。如李籍《九章算术音义》称：“箕田者，有舌有踵，其形哆哆，有如箕形。”又如李尤《箕铭》称：“箕主簸扬，糠秕乃陈”。再如《诗·大东》称：“维南有箕，不可以簸扬。”《尔雅正义》称：“箕四星，二为踵，二为舌；踵在上，舌在下，踵狭而舌广”。就是说，二十八宿之一，即箕宿；箕宿共有四星，四星的连线象簸箕，故有箕宿这一象形名称。而“箕”是簸箕的简称，可见“箕田”也是一象形名称。但是，李潢《九章算术细草图说》则把“箕田”理解为磬折形，这种理解，实无根据；不仅无法解释刘徽注“中分箕田则为两邪田”，也无法说明“正纵”，更无从阐明“箕田”一名的原意。可见理解“箕田”为磬折形显然是错误的。经文所说“舌”，是箕口的伸展部分，“踵”是箕底的收敛部分；也即等腰梯形的长、短两底边。

根据术文及刘徽注，“箕田”的面积算法为：

箕田面积＝1/2×(踵广＋舌广)×正纵，

又可

箕田面积＝1/2×正纵×(踵广＋舌广)。

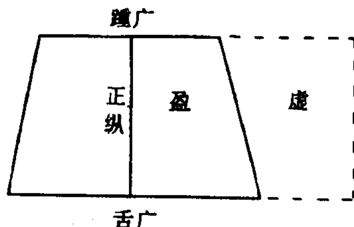


图 3·1·5

仿照邪田面积算法的证明，可证明箕田的面积算法；如图 3·1·6 所示，其中“并踵舌而半之”，当取等腰梯形长短底边和的一半，不应取两底边之半的和。否则，将不符合刘徽注“故其术相似”之

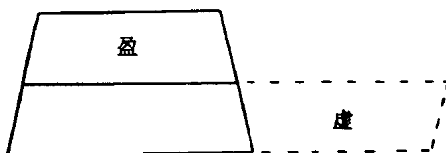


图 3·1·6

说。

以上所论，就是根据刘徽的出入相补原理，推证了一些直线型平面图形的面积算法，也即证明了“圭田”、“邪田”、“箕田”的面积算法。

第三节　刘徽的割圆术

割圆术就是把圆周等分为若干等份，再继续进行分割下去，用于推导圆面积，圆周长，或圆周率的方法。至于把圆周分成几等份，在古今中外虽没有明确的规定，但从几何的角度来分析，最便于等分的份数，要算是分成三、四、五、六等份，若要等分为七或七以上等份，虽不是不可能，但总要比较困难得多。在西方，阿基米德是由等分圆周为四等份起算的，而三国时代的刘徽，则是由等分圆周为六等份起算的。我们以为，可能为了便于计算，便于制图，并根据各个学人的喜恶而确定等分的份数的，未必是东方学人熟悉六边形的性质，而西方学人则长于四边形的性质。

在中国古代，一般称正多边形的器物为“觚”，因此，也就逐渐称正多边形为“觚”。如陆机《文赋》称：“或操觚以率尔”。又如《孙膑兵法》称：“将战书孤”。“孤”与“觚”相通，而“孤”是呈四棱柱形的木简；又如《论语·雍也》称：“子曰：觚不觚，觚哉！觚哉！”这里的“觚”，是西周盛行的一种酒器，长身，细腰，高圈足，喇叭口，有的身为圆形，有的身呈四棱形；再如《汉书·郊礼志下》称：“甘泉泰畤紫坛，八觚宣通象八方”。这里

“八觚”是指紫坛之底呈正八边形，可以象征传播四面八方；《汉书·律历志》称：“其算法用竹，径一分，长六寸，二百七十一枚而成六觚，为一握”。其中“六觚”即是指正六边形。可见在古代“觚”即是正多边形的同义语，而刘徽割圆术里，经常用到“六觚”、“十二觚”等语句，并不能说明古代学人必然熟悉“六觚”的性质。另一方面，元代赵友钦在他的《革象新书》中，其割圆术则是由“四觚”起算的；而法国数学家韦达的割圆术也是由正 6 边形起算的；所以不便断定东方人熟悉 6 边形，而西方人则擅长于正 4 边形。

一、刘徽的割圆术

《九章算术·方田》第 31，32 两问都是圆田题，分别为：

(31) 今有圆田，周三十步，径十步。问：为田几何？

答曰：七十五步。

(32) 又有圆田，周一百八十一步，径六十步三分步之一。问：为田几何？

答曰：十一亩九十步十二分步之一。

术曰：半周半径相乘得积步。

在术文之下，刘徽注称：

“按半周为纵，半径为广，故广纵相乘为积步也。”“假令圆径二尺，圆中容六觚之一面，与圆径之半，其数均等。合径率一而外周率三也。”

其前一句是说，把圆田算法看成半周为长，半径为宽的长方形，以长边乘宽边即得长方形的面积；然后刘徽便加以证明。其后一句说明，圆内接正六边形的一边与圆半径等长，而圆直径与圆内接正六边形的周长之比，等于一与三之比。在这里刘徽作了一次伏笔，以便进行批判。于是，他便继续注称：

“又按为图，以六觚之一面乘半径，因而三之，得十二觚之幂。

若又割之，次以十二觚之一面乘半径，因而六之，则得二十四觚之幂。割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。”

这就是刘徽概括地论述了他的割圆术：以圆内接正6边形一边之长乘半径，再乘以3，则得圆内接正12边形的面积；如果再次分割，以圆内接正12边形一边之长乘半径，再乘以6，则得圆内接正24边形的面积；照这样分割下去，分割的次数越多，所分割的正多边形的边长越短，而正多边形面积与圆面积之差则越小。再次分割，以至于不可分割，则正多边形与圆相合，其面积就没有区别了。若用现代符号表示，即：

圆内接正12边形面积

=6·(1/2)×正6边形一边×圆半径=$3ar$。

圆内接正24边形面积

=12·(1/2)×正12边形一边×圆半径=$6ar$。

当分割圆内接正6边形为正12边形时，刘徽把正12边形看作6个筝形；接筝形面积算法计算，取其6倍，即得正12边形的面积；而正12边形面积也可看作是以正6边形周长之半为长边，以圆半径为宽边的长方形面积。当分割圆内接正12边形为正24边形时，再把正24边形看作12个筝形；按筝形面积算法计算，取其12倍，即得正24边形的面积；而正24边形面积也可看作是以正12边形周长之半为长边，以圆半径为宽边的长方形面积(如图3·1·7所示)。在《九章算术》及刘徽注中，虽未正式提出筝形的概念和论及筝形的面积算法，但从刘徽注“以六觚之一面乘半径，因而三之，得十二觚之幂”。“以十二觚之一面乘半径，因而六之，则得二十四觚之幂”来看，刘徽深知筝形概念及其面积算法，很可能利用出入相补原理把筝形化为长方形，从而得到筝形面积算法为两对角线乘积之半。由此可以看出，刘徽利用筝形面积算法，发现并掌握了正多边形面积算法的一般规律。如果照这样无限分割

下去，利用极限观念即可得到圆面积。

在此基础上，刘徽进一步论证正多边形的面积算法：

“觚面之外，犹有余径。以面乘余径，则幂出觚表。若夫觚之细者，与圆合体，则表无余径。表无余径，则幂不出外矣。以一面乘半径，觚而裁之，每辄自倍。故以半周乘半径而为圆幂。”

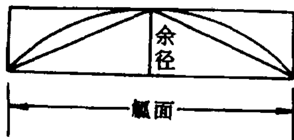


图 3・1・7

如图 3・1・7 所示，在正 n 边形各边之外，尚有余径；而“余径”即是圆半径与正 n 边形边心距之差；以正 n 边形之边乘余径所得面积，与正 n 边形面积相加之和，则大于圆面积，即“幂出觚表”。若分割次数越多，正多边形的边长越短；当正多边形边长趋近于零时，正多边形就与圆相合了，此时在正多边形之外则不存在所谓余径。正多边形之外没有余径，所计算出的面积则不大于圆面积，即“幂不出外矣”。以正多边形之一边乘半径，并按筝形面积算法计算，可以化正多边形为长方形，当分割次数增多而每每成倍增长时，则得圆周之半为长边，圆径之半为宽边的长方形，于是便证明了术文“半周半径相乘得积步”。也论述了刘徽注“半周为纵，半径为广，故广纵相乘为积步也”。这就是刘徽利用出入相补原理，按割圆术论证的圆面积算法。

刘徽在论证了圆田术文“半周半径相乘得积步”之后，进一步评论古率“周三径一”之说；刘徽注接着说：

“此以周径，谓至然之数，非周三径一之率也。周三者从其六觚之环耳。以推圆规多少之数，乃弓之与弦也。然世传此法，莫肯精核。学者踵古，习其谬失。不有明据，辩之斯难。凡物类形象，不圆则方。方圆之率，诚著于近，则虽远可知也。由此言之，其用博矣。”

刘徽认为，按上述法则计算出的圆周长与圆直径之比，是较精密的数值，并不是周三径一的比率，即 $\pi=3$。古率所谓周三实

际乃是圆内接正 6 边形的周长；若以此推算圆周的大小之数，实乃弓弦与弓背的关系一样，两者是不能相合的。然而此及自古相传之术，又无人仔细进行推敲。而学人又迷信古人之说，于是便以讹传讹。如果没有确凿证据，则难予明辨。刘徽还认为，凡物体的形状，非圆即方。如研究方与圆之间的各种关系，都是邻近身旁的显而易见的事物，以由此乃彼、由近及远的观点来看，即使是远处的事物，也可知其一、二。由此言之，其用途是很大的。

以上所论，在中国，刘徽是第一次科学地论述圆面积的求法，并第一次科学地阐述了圆周率较精密的值的算法；在刘徽之前，虽然也有人论及圆面积计算方法，也有人不满古率周三径一之说，但都未能作出有力的科学的论断。

二、刘徽割圆术的具体计算

刘徽为了加强割圆术的说服力并推算较精密之值，便结合图形给予具体算法，他说：

“谨按图验，更造密率。恐空设法，数昧而难譬。故置诸检括。谨详其记注焉。”

于是刘徽便由圆内接正 6 边形推算正 12 边形，并说：

“割六觚以为十二觚术曰：置圆径二尺，半之为一尺，即圆里六觚之面也。令半径一尺为弦，半面五寸为勾，为之求股。以勾幂二十五寸减弦幂，余七十五寸。开方除之，下至秒忽。又一退法，求其微数。微数无名者以为分子，以十为分母，约作五分忽之二。故得八寸六分六厘二秒五忽五分忽之二。以减半径，余一寸三分三厘九毫七秒四忽五分忽之三，谓之小勾。觚之半面又谓之小股。为之求弦。其幂二千六百七十九亿四千九百一十九万三千四百四十五忽，余分弃之。开方除之，即十二觚之一面也。”

如图 3・1・8 所示，假设圆径 2 尺，半径即是 1 尺，也即圆内接正 6 边形一边之长。以半径 1 尺作为勾股形之弦，以正 6 边形之

半边 5 寸作为勾，以求其股长。按勾股定理，取弦幂 100 方寸减去勾幂 25 方寸，余 75 方寸。开平方，求至秒忽，再退位求其微数。把微数作为分子，把 10 作为分母，约分得 2/5 忽。故得股长为：

OD＝股长＝8 寸 6 分 6 厘 2 秒 5 忽＋2/5 忽。

由圆半径减去此股长，称为小勾，得小勾为：

CD＝小勾＝1 寸 3 分 3 厘 9 毫 7 秒 4 忽＋3/5 忽。

又称正 6 边形之半边 $DB=500000$ 忽为小股，由勾股定理推求小弦；于是得小弦幂为：

$BC^2=BD^2+CD^2=267949193445$ 方忽；

开平方则得小弦，也即正 12 边形的一边之长；即

$a_{12}=BC=\sqrt{267949193445}$ 忽。

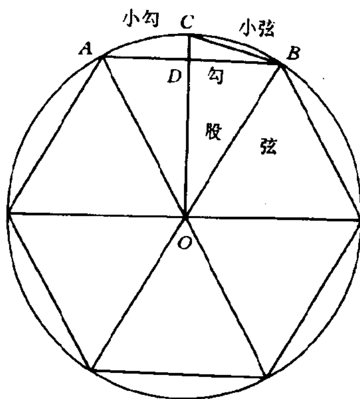


图 3·1·8

这就是刘徽用勾股定理推求正 12 边形边长的算法，根据刘徽注："以十二觚之一面乘半径，因而六之，则得二十四觚之幂。"故可算得正 24 边形的面积为：

$S_{24}=310+364/625$。（单位：平方寸）

在此基础上，刘徽进一步推求正 24 边形之边长；他说：

“割十二觚以为二十四觚术曰：亦令半径为弦，半面为勾，为之求股。置上小弦幂，四而一，得六百六十九亿八千七百二十九万八千三百六十一忽，余分弃之，即勾幂也。以减弦幂，其余，开方除之，得股九寸六分五厘九毫二秒五忽五分忽之四。以减半径，余三分四厘七秒四忽五分忽之一，谓之小勾。觚之半面，又谓之小股。为之求小弦。其幂六百八十一亿四千八百三十四万九千四百六十六忽，余分弃之。开方除之，即二十四觚之一面也。”

仍如前图 3·1·8，以圆半径作为弦，以正 12 边形边长之半作为勾，推求股长。以 4 除上述的小弦幂，得：$(a_{12}/2)^2=66987298361$ 平方忽；以此作为勾幂。由弦幂即半径平方减去此勾幂，开平方即得股长为：

$$\sqrt{r^2-(a_{12}/2)^2}=\sqrt{1000000000000-66987298361}$$
$$=965925+4/5。\text{（单位：忽）}$$

由半径减去此股长，余为：

$$r-\sqrt{r^2-(a_{12}/2)^2}=34074+1/5。\text{（单位：忽）}$$

称为小勾。又称正 12 边形边长之半（$a_{12}/2$）为小股，推求小弦。得：

$$[r-\sqrt{r^2-(a_{12}/2)^2}]^2+(a_{12}/2)^2=68148349466 \text{ 平方忽；}$$

开平方即得正 24 边形一边之长。即

$$a_{24}=\sqrt{68148349466}\text{忽。}$$

这就是刘徽推求正 24 边形边长的算法，根据刘徽注，于是可算得正 48 边形的面积：

$$S_{48}=313+164/625。\text{（单位：平方寸）}$$

基于此，刘徽继续论及推求正 48 边形的边长与正 96 边形的面积：

“割二十四觚以为四十八觚术曰：亦令半径为弦，半面为勾，

为之求股。置上小弦幂，四而一，得一百七十亿三千七百八万七千三百六十六忽，余分弃之，即勾幂也。以减弦幂，其余，开方除之，得股九寸九分一厘四毫四秒四忽五分忽之四。以减半径，余八厘五毫五秒五忽五分忽之一，谓之小勾。觚之半面，又谓之小股。为之求小弦。其幂一百七十一亿一千二十七万八千八百一十三忽，余分弃之。开方除之，得小弦一寸三分八毫六忽，余分弃之。即四十八觚之一面。以半径一尺乘之，又以二十四乘之，得幂三万一千三百九十三亿四千四百万忽。以百亿除之，得幂三百一十三寸六百二十五分寸之五百八十四，即九十六觚之幂也。"

以圆半径 r 作为弦，正 24 边形之半边 $(a_{24}/2)$ 作为勾，推求股长。以 4 除上述小弦幂，即以 4 除正 24 边形半边的平方，$(a^{24}/2)$ = 17037087366 方忽，即是勾幂。由弦幂即半径幂减去此勾幂，开平方则得股长为：

$$\sqrt{[r^2-\ (a_{24}/2)^2]}=\sqrt{(1000000000000-17037087366)}$$
$$=991444+4/5。（单位：忽）$$

由半径减去此股长，余为：

$$r-\sqrt{[r^2-\ (a_{24}/2)^2]}=8555+1/5。（单位：忽）$$

称为小勾。又称正 24 边形边长之半 $(a/2)$ 作为小股，推求小弦。得

$$[r-\sqrt{r^2-(a_{24}/2)^2}]^2+(a_{24}/2)^2=17110278813 \text{ 平方忽。}$$

开平方就是正 48 边形的一边之长。即

$$a_{48}=\sqrt{17110278813}=130806 \text{ 忽。}$$

此即推求正 48 边形边长的算法。以此边长乘半径 1 尺，乘以 24 再除以 10000000000，即得正 96 边形的面积为：

$$S_{96}=313+584/625。（单位：平方寸）$$

刘徽继续推求正 96 边形的边长及正 192 边形的面积：

“割四十八觚以为九十六觚术曰：亦令半径为弦，半面为勾，为之求股。置次上小弦幂，四而一，得四十二亿七千七百五十六万九千七百三忽，余分弃之，则勾幂也。以减弦幂，其余，开方除之，得股九寸九分七厘八毫五秒八忽十分忽之九。以减半径，余二厘一毫四秒一忽十分忽之一，谓之小勾。觚之半面，又谓之小股。为之求小弦。其幂四十二亿八千二百一十五万四千一十二忽，余分弃之。开方除之，得小弦六分五厘四毫三秒八忽，余分弃之，即九十六觚之一面。以半径一尺乘之，又以四十八乘之，得幂三万一千四百一十亿二千四百万忽。以百亿除之，得幂三百一十四寸六百二十五分寸之六十四，即一百九十二觚之幂也。”

以圆半径 r 作为弦，以正 48 边形之半边 $a_{48}/2$ 作为勾，推求股长。以 4 除上述正 48 边形所谓小弦幂，得 $a_{48}/2=4277569703$ 平方忽，作为勾幂。由弦幂即半径幂减去此勾幂，开平方即得股长为：

$$\sqrt{r^2-(a_{48}/2)^2}=\sqrt{10000000000000-4277569703}$$
$$=997858+9/10。（单位：忽）$$

由圆半径减去此股长，余为

$$r-\sqrt{r^2-(a_{48}/2)^2}=2141+1/10，（单位：忽）$$

称为小勾。又称正 48 边形之半边（$a_{48}/2$）为小股，推求小弦。得

$$[r-\sqrt{r^2-(a_{48}/2)^2}]^2+(a_{48}/2)^2=4282154012 平方忽。$$

开平方即是正 96 边形之一边长，即

$$a_{96}=65438 忽。$$

此即正 96 边形边长的算法。以之乘半径 1 尺，又乘以 48，再除以 10000000000，则得圆内接正 192 边形的面积为：

$$S_{192}=314+64/625。（单位：平方寸）$$

以上所述，就是刘徽逐步推算圆内接正 12、24、48、96 边形的边长及正 24、48、96、192 边形的面积算法，可以看出，刘徽

不但掌握了推求正多边形边长算法规律，也深刻了解推算正多边形的面积算法规律，还熟悉正多边形面积与圆面积的关系。即：

$$a_{2n}=\left[r-\sqrt{r^2-(a_n/2)^2}\right]^2+(a_n/2)^2,$$

$$S_{2n}=\frac{n}{2}a_nr,$$

$S_{2n}<S<S_{2n}+3\cdot 2$ 个“余径”的多边形面积。

在算得圆内接正 192 边形面积之后，刘徽为了进一步确定圆面积，他接着说：

“以九十六觚之幂减之，余六百二十五分寸之一百五，谓之差幂。倍之，为分寸之二百一十，即九十六觚之外弧田九十六，所谓以弦乘矢之凡幂也。加此幂于九十六觚之幂，得三百一十四寸六百二十五分寸之一百六十九，则出于圆之表矣。故还就一百九十二觚之全幂三百一十四寸，以为圆幂之定率，而弃其余分。”刘徽由正 192 边形面积减去正 96 边形面积，余为：

$$S_{192}-S_{96}=(314+64/625)-(313+584/625)$$
$$=105/625(\text{平方寸})。$$

称之为“差幂”。取差幂的二倍，得：

$$2(S_{192}-S_{96})=210/625\ \text{平方寸}。$$

这就是正 96 边形之外 96 个长方形的面积，既是前文所说“觚面之外，犹有余径。以面乘余径，则幂出觚表”之“面乘余径”之积，又是后文所说“九十六觚之外方田九十六，所谓以弦乘矢之凡幂也”之“以弦乘矢”的乘积。也就是正 96 边形之边乘以余径所得面积之和。以此面积与正 96 边形面积相加，所得则超过圆面积。

故有：

$$S_{96}+2(S_{196}-S_{96})=(313+584/625)+210/625$$
$$=314+165/625>S。$$

据此，舍去此奇零尾数，以半径 1 尺的圆内接正 192 边形面积的

整数部分作为圆面积的定率。即：

$S_{192}=314$ 平方寸。

三、刘徽的圆周率算法

刘徽取半径 1 尺的圆的内接正方形与外切正方形，计算其面积之比为：

外切方形面积：圆面积：内接方形面积$=P:S:Q=400:314:200$，从而求得圆周长与圆径的比率，即圆周率，于是他说：

“以半径一尺除圆幂，倍之得六尺二寸八分，即周数。令径自乘为方幂四百寸，与圆幂相折，圆幂得一百五十七为率，方幂得二百为率。方幂二百，其中容圆幂一百五十七也。圆率犹为微少。按弧田图，令方中容圆，圆中容方，内方合外方之半。然则圆幂一百五十七，其中容方幂一百也。又令径二尺与周六尺二寸八分相约，周得一百五十七，径得五十则其相与之率也。周率犹为微少也。”

如图 3・1・9 所示，圆面积 314 平方寸除以半径 1 尺，并取其 2 倍，即得圆周长为：

$C=2\cdot S/r=6$ 尺 2 寸 8 分。

在圆 S 外作外切正方形 P，在圆内作内接正方形 Q，其面积之比为（图 3・1・9）：

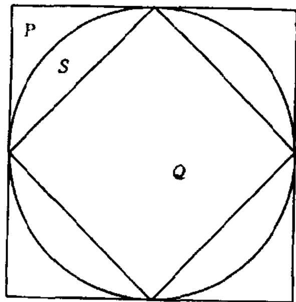


图 3・1・9

$$P:S:Q=400:314:200$$
$$=200:157:100,$$

也即，在正方形面积为 200 之内，其内切圆面积若为 157，而圆的比率 157 似觉微少；在面积为 157 之圆内，作内接正方形，由内方是外方面积之半，故知外方面积则为 100。又取圆直径 2 尺与圆周 6 尺 2 寸 8 分相约，则得圆周

率为：

$$\pi = C : (2r) = 157 : 50。$$

这是刘徽第一次科学地求得的圆周率，但他认为此值略嫌微少。因此，他打算一面验证此率，一面再求较精密圆周率，于是他说：

“晋武库汉时王莽作铜斛，其铭曰：‘律嘉量：斛，内方尺而圆其外，庣旁九厘五毫，幂一百六十二寸，深一尺，积一千六百二十寸。容十斗’。以此术求之，得幂一百六十一寸有奇，其数相近矣。此术微少，而差幂六百二十五分寸之一百五。以十二觚之幂为率消息，当取此分寸之三十六，以增于一百九十二觚之幂，以为圆幂，三百一十四寸二十五分寸之四。置径自乘之方幂四百寸，令与圆幂通相约，圆幂三千九百二十七，方幂得五千。是为率，方幂五千中容圆幂三千九百二十七，圆幂三千九百二十七中容方幂二千五百也。以半径一尺除圆幂三百一十四寸二十五分寸之四，倍之得六尺二寸八分二十五分分之八，即周数也。全径二尺，与周数通相约，径得一千二百五十，周得三千九百二十七，即其相与之率。”

当刘徽求得圆周率为 $\pi=157/50$ 时，他并不满意，一方面用王莽嘉量斛的铭文加以验算，一方面再推求较精密的圆周率；他以 $\pi=157/50$ 入算，推求王莽嘉量斛的底面积为：

$$S=161.24\text{ 平方寸}\approx 161\text{ 平方寸},$$

认为所计算的结果与铭文的记载差不多，但这一圆周率的值还显得微少。他又用圆内接正 192 边形与正 96 边形面积之差，即

$$(S_{192}-S_{96})=105/625,$$

取此数值的 1/3 的近似值，即 36/625，使加于正 192 边形面积，则得

$$S_{192}+1/3\cdot(S_{192}-S_{96})\approx(314+64/625)+36/625$$
$$=314+4/25,\text{（单位：平方寸）}$$

则得

圆面积：外切正方形面积＝(314＋4/25)：400

＝3927：5000，

也就是说，面积为5000的正方形，其内切圆的面积为3927；而面积为3927的圆，其内接正方形面积为2500。也即：

圆外切正方形面积：圆面积：圆内接正方形面积

＝5000：3927：2500，

然后，以半径1尺除圆面积314＋4/25（单位：平方寸）再取其2倍，得圆周长为6尺2寸8＋4/25分。以圆周长与圆直径2尺相约，即得圆周率为：

$\pi=3927/1250$。

这就是刘徽求得的第二个较精密的圆周率近似值。刘徽认为这一近似值比前一值精密，他高兴地说："若此者，盖尽其纤微矣。"他还认为若在实际使用中，而上述的圆周率$\pi=157/50$仍比较方便。他又说，即使算到正1536边形的一边长，从而推出正3072边形的面积，仍然能求得这样的圆周率，也可说得到了一次验证。

清代李潢于《九章算术细草图说》中，提出疑问，认为"晋武库"以下一段注文未必是刘徽的，可能是祖冲之的手笔；根据李潢提出的疑问，后世人也有论及此事者。究竟"晋武库"以下注文是刘徽原注，还是祖冲之的注文，众说纷云，莫衷一是，迄今仍没有定论；不过，我们以为，"晋武库"以下一段当是刘徽的注文。因为：

(1) 在《九章算术·商功》尚有两段刘徽注文，所引用的文字也是"王莽嘉量斛"的铭文，虽然所引文字不尽相同，只能说明刘徽未见到王莽嘉量斛原器，但这三段文字十分相近，所用语气，精神，词汇，观点几乎完全一致，所以可作为"晋武库"以下一段是刘徽注的旁证。

(2) 当刘徽求得$\pi=157/50$时，他说："周得一百五十七，径得五十，则其相与之率也。周率犹为微少也。"而在"晋武库"以

下则说“若此者，盖尽其纤微矣。举而用之，上法仍约耳。”又说“当求……，而裁其微分，数亦宜然，重其验耳。”可见，其前后两处所说乃是前后呼应之文，前文当是后文的伏笔，而后文则是前文的应承；所以前后两文似是出自一人之手。

（3）在李淳风所撰《隋书·律历志》中称：“魏陈留王景元四年刘徽注《九章算术》。”虽未说明是刘徽开始注《九章算术》，还是注毕《九章算术》，但两年后魏亡即建立西晋，此时刘徽或不致去世，可能仍在继续注解《九章算术》，而《九章算术·商功》的两段注文及此处“晋武库”以下一段注文，可能是入晋以后刘徽的注文；由《九章算术·商功》圆第28问注文“亦魏、晋所常用”一语，即知是刘徽入晋以后的注文。这段既是刘徽入晋以后的注文，其他两段注文也当是入晋以后刘徽的注文。

（4）刘徽是一位杰出的布衣数学家，入晋以后，未必能到西晋军事重地“晋武库”一睹王莽嘉量斛，由刘徽注所引斛铭的文字来看，刘徽所引与台北所藏王莽嘉量斛的铭文不尽相同，可见刘徽并未曾目睹王莽嘉量斛实物；又由《九章算术·商功》第28问注文“今粗疏王莽铜斛文字尺寸分数，然不尽得升合勺（当为龠）之文字”可知，刘徽未睹王莽嘉量斛实物，因王莽嘉量斛是斛、斗、升、合、龠五位一体，如果见到实物，必然看到升、合、龠的铭文，若依此而论，刘徽确实未睹王莽嘉量斛实物；到了惠帝元康五年（295年），晋武库大火，晋武库所藏之王莽嘉量斛可能失传，而200年后，刘宋祖冲之能否见到王莽嘉量斛，也难断定。但是，反过来说，如果说“晋武库”以下一段注文是祖冲之所写的话，则可以断定，祖冲之所引文字显系抄自刘徽所传抄的文字。可是这种说法似乎不可能。因为，他似乎不会说“以此术求之”、“此术微少”，而应该说“以徽术求之”、“徽术微少”，或较合理。即使他称“此术”而不称‘徽术’，《隋书·律历志》为何只提

$$\pi=22/7,$$

$$\pi=355/113,\ 3.1415926<\pi<3.1415927,$$

而只字不提 $\pi=3927/1250$ 一值？由此可以猜想，“晋武库”以下一段注文或不是出自祖冲之的手笔。

在“晋武库”以下一段注文中，有

“此术微少，而差幂六百二十五分寸之一百五。以十二觚之幂为率消息，当取此分寸之三十六，以增于一百九十二觚之幂以为圆幂，三百一十四寸二十五分寸之四”

一语，其中“消息”二字尤难解释。

《易·丰》称：“日中则昃，月盈则食，天地盈虚，时与消息。”在这里，“消息”二字应该理解为增增减减或有增必有减的意思。在上述

$$S=(314+64/625)+36/625=314+4/25$$

一式中，这一加数 36/625 究竟是如何得到的，注文只说“以十二觚之幂为率消息”一语，行文过于简略，不易得到确切解释。但日本学者三上义夫则认为：

依据刘徽注文，可得正多边形面积分别为：

$$S_{12}=300,\ S_{24}=310+364/625,\ S_{48}=313+164/625,$$

$$S_{96}=315+584/625,\ S_{192}=314+64/625,$$

其相邻两项之差各为：

$$S_{24}-S_{12}=6614/625,\ S_{48}-S_{24}=1675/625,$$

$$S_{96}-S_{48}=420/625,\ S_{192}-S_{96}=105/625.$$

其相邻两差之比则为：

$$(S_{48}-S_{24})\ /\ (S_{24}-S_{12})\approx 1/4,$$

$$(S_{96}-S_{48})\ /\ (S_{48}-S_{24})\approx 1/4,$$

$$(S_{192}-S_{96})\ /\ (S_{96}-S_{48})\approx 1/4,$$

……

故得两正多边形面积之差为：

$S_{1536}-S_{768}=1/4\times(S_{768}-S_{384})=1/4\times105/625$

$=1/4\times(S_{768}-S_{384})=1/16\times(S_{384}-S_{192})$

$=1/16\times105/625$

$=1/4\times(S_{768}-S_{384})=1/16\times(S_{384}-S_{192})$

$=1/64\times(S_{192}-S_{96})=1/64\times105/625$

……

依次相加上列各式，则得圆面积为：

$$S_{\odot}=S_{192}+(S_{384}-S_{192})+(S_{768}-S_{384})+(S_{1536}-S_{768})+\cdots$$
$$=S_{192}+(1/4+1/16+1/64+\cdots)\cdot(S_{192}-S_{96})$$
$$=(314+64/625)+(1/4+1/16+1/64+\cdots)\cdot 105/625$$
$$\approx(314+64/625)+36/625=314+4/25.$$

至于推求等比级数之和 $1/4+1/16+1/64+\cdots=1/3$ 一事，三上义夫则认为中国古代可能会计算这一问题。他认为“一尺之棰，日取其半，万世不竭”就是很好的证明。如果三上义夫所说不谬，则注文“以十二觚之幂为率消息”的“以”字下，当校补“一百九”三字。但是，“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，就是推求下列级数之和：

$$S=1/2+1/4+1/8+1/16+\cdots\rightarrow1.$$

在中国古代，究竟是如何具体地求得此级数之和的，尚未发现有明确的记载。至于能否求得级数之和：$1/4+1/16+1/64+\cdots=1/3$，还需进一步探讨。而沈康身基本上从三上之说。

最近，李继闵指出，他取正 24 边形与正 12 边形的面积差，正 192 边形与正 96 边形的面积差分别为 $\triangle_1$、$\triangle_2$，取圆与正 24 边形的面积差为的 δ_{24}，又设圆与正 192 边形的面积差为 δ_{192}。即：

$\triangle_1=S_{24}-S_{12}=0.105$ 平方尺，

$\triangle_2=S_{192}-S_{96}=105/625$ 平方寸，

$\delta_{192}=S_{\odot}-S_{192}=0.036$ 平方尺，

设 $\delta_{192}=S_{\odot}-S_{192}$. 又从下列比例导出圆面积，即由

$$\triangle_{96}:\delta_{192}=\triangle_{12}:\delta_{24}，即 105/625:\delta_{192}=106:36,$$

导出 δ_{192} 之值，即 $\delta_{192}=36/625$，然后求得圆面积为

$$S_{\odot}=S_{192}+\delta_{192}=(314+64/625)+36/625$$
$$=314+4/25。（单位：平方寸）$$

这些计算虽然“与刘徽的记述竟如此吻合”，但这种复杂的运算是否符合注文作者的原意，则是需要作一番深入研究的。

在三上义夫的解释中，当割圆的次数逐渐增多时，两个相邻正多边形面积差与下两个相邻正多边形面积差之比，接近于 4∶1。三上义夫可能认为刘徽发现这一规律后进行上述运算的。这种猜测，有一定道理，但缺少等比级数求和的依据。而李继闵的解释，是说圆内接正 24 边形与正 12 边形面积差对正 192 边形与正 96 边形面积差之比，等于圆与正 24 边形面积差对圆与正 192 边形面积差之比；用这一比例求出“当取此分寸之三十六”，用这一比例解释“以十二觚之幂为率消息”之“消息”二字；其计算结果固然与注文相一致，但这一比例是否符合原意，却是值得研究的。李继闵又将“以十二觚之幂为率消息”一语，校补为“以十二觚之差幂为率，以率消息”。这种改动的原委及其必要性，似欠充分。

在圆田术之后，《九章算术》给予三个又术，即“周径相乘，四而一。”“径自相乘，三之，四而一。”“周自相乘，十二而一。”刘徽对这三个“又术”都作了相应的注解，并作了必要的分析。

第四节　刘徽的化曲为直学说以及截割原理的初步学说

刘徽对直线型平面图形面积进行了研究之后，转向曲线型平面图形面积的研究；例如他论证了圆面积的各种算法并求出圆周

率的两个近似值。刘徽在推证圆面积的过程中，是将圆分割成边数逐渐增加的内接正多边形，当正多边形的边长逐渐减小时，使直线型正多边形的面积逼近圆面积，使正多边形的周长逼近圆周长。这就是刘徽所采用的“化曲为直”的学说。此外，他还论证了其他圆型图形的面积。

一、宛田

《九章算术·方田》第33，34问分别为：

(33) 今有宛田，下周三十步，径十六步。问：为田几何？

答曰：一百二十步。

(34) 又有宛田，下周九十九步，径五十一步。问：为田几何？

答曰：五亩六十二步四分步之一。

术曰：以径乘周，四而一。

“宛田”究竟是何种形状，众说纷纭，莫衷一是。《说文解字》称：“宛，屈草自覆也。”是表示弯曲之意；《尔雅·释丘》称：“宛中宛丘。”郭璞注称：“宛，谓中央隆高。”是指中央高，四周低下之意；李籍《九章算术音义》称：“畹，当作宛，字之误也。宛田者，中央隆高。《尔雅》曰：宛中宛邱。又曰：邱上有邱为宛邱。皆中央隆高之义也。”所说《九章算术》中的“宛田”是中央隆高的丘陵田地。有的书不称“宛田”，而称为“畹田”，李籍认为是“字之误也”。可见正确的字是“宛”，而不是“畹”。今从李籍之说。

《夏侯阳算经》“论步数不等”下记载有丸田条，原文为：“丸田。(注称) 形如覆半弹丸。术曰：径乘周，四而一，得积步。以亩法除之。”根据《夏侯阳算经》的注文可知，此处之“丸田”，当是指球冠形。

《五曹算经》卷一“田曹”有“丘田”一问，即：“今有丘田，周六百四十步，径三百八十步。问为田几何？答曰：二顷五十三

亩，奇八十步。术曰：列周六百四十步，半之，得三百二十步。又列径三百八十步，半之，得一百九十步。二位相乘得六万八百步。以亩法除之，即得。”这里所说的“丘田”，当是“丘陵”形的田地，由其术文来看，《五曹算经》的“丘田”与《九章算术》的“宛田”是极其相似的。《五曹算经》所说“丘田”是中央隆高四周低下的丘陵形田地，而《九章算术》所说“宛田”也是中央隆高四周低下的丘陵形田地。

杨辉《田亩比类乘除捷法》卷上有“畹田”一问，即：“今有畹田，下周三十步，径十六步。问田几何？（注称）出《九章算术》。答曰：一百二十步。（术曰）圆田周三径一之法。合径一十步，周三十步。‘径十六步’，借圆田‘周径相乘，四而一’为术。若径步与周势远甚者，不可专此术。草曰：周三十步乘径十六步，得四百八十步。以四除之，得一百二十步。”在此问之下，杨辉给予“比类”一条，称：“《五曹算经》‘丘田’：‘外周六百四十步，径三百八十步。问田几何？答曰：二顷五十三亩八十步’。丘田比附畹田，用‘周径相乘，四而一’之法，田围凸外者可用；或围步凹里者，未免围多积少不合法理；须当分段求之可也”。杨辉还给出算草为：“草曰：周径相乘得二万四千三百二十步，以四除之，得六万八百步。亩法除之。”

“畹”字虽为古代度量面积的单位，但有人认为“畹，三十亩也。”有人以为“十二亩曰畹。”也有人以为“三十步为畹。”其说法极不统一。杨辉用“畹田”一词代替《九章算术》的“宛田”，由杨辉所引用的文字来看，未必是为了表明它表示田亩之名称。可能是算家的习用字，或是算家的误用字。又由杨辉所引用的“畹田”内容，“丘田”内容及其所绘的图形来看，此处的“畹田”就是《九章算术》的“宛田”、《五曹算经》的“丘田”，可能都是指丘陵形的田地。

朱世杰《算学启蒙》卷中有“畹田”一问：

“今有畹田一段，下周六十四步，径三十三步。问为田几何？答曰：二亩二分。术曰：列周六十四步，以径三十三步乘之，得二千一百一十二。以四而一，得五百二十八，为田积步。以亩法二百四十步除之，（注称）‘畹田、洼田，同圆田法一也’。合问。”

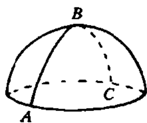


图 3·1·10

在朱世杰《四元玉鉴》卷上之二有“畹田”及“洼田”各一问。虽然这两问都是用天元术解的有关“畹田”、“洼田”问题，其计算有关“畹田”及“洼田”的面积过程中，都使用了“以径乘周，四而一”的算法。又由所绘“畹田”、“洼田”的图形以及《算学启蒙》的“畹田”图形来看，朱氏所论的“畹田”，就是中央隆高四周低下的丘陵形田地。而“洼田”乃是中央低下的田地。

在罗士琳《算学启蒙后记》中说：

“至于是书‘畹田’之‘畹’，并见《玉鉴》，或疑字书所无。案刘徽所注之《九章算术》，本亦作‘畹’。李籍《九章算术音义》谓：‘当作宛，字之误也’。盖取《尔雅》宛中宛邱注：‘中央隆高’之义。今刻从李所改。《杨辉算法》作‘畹’。考《说文》‘畹’下注：‘田三十亩也’。与‘中央隆高”义迥别。《夏侯阳算经》‘丸田’注：‘形如覆半弹丸；术曰：径乘周，四而一’。与此合。丸，皖音近，畹，皖形近似；皖虽不见于字书，殆如明邢云路《古今律历考》：‘幂积’之‘幂’，别作冥，同为算书习用字。”

综上所述，幂积之幂，别作冥，确是算书习用字，其原因是“幂”、“冥”都是指遮盖物品的方布，自刘歆以“冥”表示面积以来，“冥”、“幂”都变成为数学的术语了。而“宛”是中央隆高，“畹”是度量田亩的单位，“丸”是球。三者之意各有区别，因此，我们认为，“畹”，“皖”不可能是“宛”字的习用字；当是“字之误也”。

至于“宛田”的形状，虽然一般说是“中央隆高”的田地，但

其具体形状还有进一步研究的必要。清代李潢于《九章算术细草图说》称："今法浑圆面任割一分，欲求面分之容，……"李潢所说"浑圆"，就是球，"浑圆面任割一分"，即是分割球面之任一部分，用现今术语来说，就是球冠形；《九章算术》"宛田"两问就是求球冠形之面积，即"欲求面分之容"。自此以后，多认为"宛田"就是球冠形。但是，最近有人通过计算，以为"宛田"若是球冠形，则此球冠形必然大于半球，而这种大于半球的田地，根本不符合实际。因而认为"宛田"是大于半圆的优扇形田地。也有人认为"宛田"是凸月形；还有人认为是抛物线旋转面；更有人认为是馒头形；等等，不一而足。

《九章算术》及刘徽、李淳风注文中所用之"上"、"下"两字，都是指在上者为"上"，在下者则为"下"；可以说无一例外。《九章算术》"宛田"两问所给的条件，一为"下周"，一为"径"；如果"宛田"是优扇形的话，则优扇形的周不必一定在"下"，既不像持此说者所绘制的图形，又不像持此说者不合逻辑的说法："下周者，乃下余之周也"，更不悉持此说者在这里如何解释"下余之周"。由于"宛田"两问各给出两个条件"下周"，"径"，因而只能确定凸月形的"下周"和"径"，而凸月形的上面圆弧则是一不定弧，于是凸月形就成一个不定形，在《九章算术》里迄今尚未发现不定形之说。可见持凸月形之说者，有待进一步研究。至于认为"宛田"是抛物线旋转面，则更是超越了《九章算术》那个时代。虽然抛物线旋转面有算法可以遵循，而《九章算术》所列各问题不是有正确的算法，便是具有根据的近似算法，但是馒头形的表面积则是无法计算的，因此我们以为持这种说者，似应再次深入研究。

根据以上所说各点，我们认为"宛田"就是球冠形。

在"宛田"术文之下，刘徽注称：

"此术不验。故推方锥以见其形。假令方锥下方六尺，高四尺。

四尺为股，下方之半三尺为勾，正面斜为弦，弦五尺也。令勾弦相乘。四因之，得六十尺，即方锥四面见者之幂。若令其中容圆锥，圆锥见幂与方锥见幂，其率犹圆幂之与方幂也。按方锥下方六尺，则方周二十四尺，以五尺乘而半之，则亦方锥之见幂。故求圆锥之数，折径以乘下周之半，即圆锥之幂也。今宛田上径圆穹，而与圆锥同术，则幂失之于少矣。然其术难用，故略举大较，施之大广田也。求圆锥之幂，犹求圆田之幂也。今用两全相乘，故以四为法，除之，亦如圆田矣。”

在《九章算术》及刘徽注文中，“径”是指过球冠之顶与底面垂直的大圆圆弧，即现今所谓球面径 ABC（如图 3·1·11）；“下周”即是球冠形底之圆周；“方锥”是指正四棱锥；“正面斜”即是正四棱锥的斜高 VE；“见者之幂”或“见幂”就是方锥或圆锥的侧面积；在同一平面内圆锥的两条母线称为“径”，其中任一母线则称为“折径”；“下周”就是圆锥的底面圆周。在刘徽注中，为了评论球冠形的面积，刘徽假定高 4 尺，底边 6 尺的正四棱锥，其斜高为 5 尺，则方锥侧面积为 60 平方尺；在此方锥中作一内切圆锥，设圆锥侧面积为 Q，方锥侧面积为 P，又设圆锥底面直径即方锥底面边长为 a，圆锥母线即方锥斜高为 h，并设圆锥底面积、方锥底面积分别为 S、S'，则得：

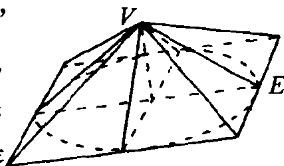


图 3·1·11

$$Q:P=(\pi ah/2):(2ah)=\pi:4,$$

$$S:S'=(\pi a/4):a=\pi:4,$$

故有　$Q:P=S:S'$.

于是，刘徽乃说：“圆锥见幂与方锥见幂，其率犹圆幂之与方幂也。”其中推求圆锥侧面积的算法，也是以圆锥母线乘圆锥底周之半，即得圆锥的侧面积。但是，刘徽是否理会到相当于卡瓦列里原理的“截口原理”，即平行于底的方锥与内切圆锥的截面之比就是正方

形周长与其内切圆周之比。从字面而论，刘徽注似未论及正方形周长与其内切圆周之比；因此，很难说明刘徽意识到“方锥面是由外切正方形叠积而成，而圆锥面是由内切圆周叠积而成”。我们以为，只能说这是刘徽截割原理的初步学说。

由于“宛田”的径是一圆弧，而圆锥的“径”是一折线，其顶是一“尖端”；若按《九章算术》所载“宛田”面积求法计算，由于其计算方法与圆锥侧面积算法相同，而计算出的面积则必然“失之于少”。刘徽评价得十分正确。若根据《九章算术》的算法，只能计算其面积的大概数值；不能算出较确切的数值。因此刘徽乃称“此术不验”。

二、弧田

《九章算术・方田》第 35，36 问分别为：

(35) 今有弧田，弦三十步，矢十五步。问：为田几何？

答曰：一亩九十七步半。

(36) 又有弧田，弦七十八步二分步之一，矢十三步九分步之七。问：为田几何？

答曰：二亩一百五十五步八十一分步之五十六。

术曰：以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一。

“弧田”，即是现今所谓弓形的田地，或称为弓形。根据《九章算术》所给的算法，可得

$$弧田面积=1/2\times(弦\times矢+矢\times矢).$$

这算法是一近似算法，究竟如何形成，有一些猜测，如图 3・1・12 所示，一般都是利用割补术进行猜测的。有人以为，过弓形高的顶点作圆弧的切线，使其长等于弓形的高，分别联结切线与弓形弦的两端，则成一等腰梯形。设弓形弦长为 b，高即矢为 h，而梯形的上，下底分别为 b，h，故得弓形面积的近似公式为：

$$弓形面积=1/2\cdot(b+h)\cdot h=1/2\cdot(b\cdot h+h\cdot h),$$

或　弧田面积=1/2・(弦+矢)×矢=1/2・(弦×矢+矢×矢).
但《九章算术》作者能否把{1/2・(弦+矢)×矢}转化为{1/2・(弦×矢+矢×矢)}，还是值得研究的问题。

另一种猜测是，以弓形的高为边作一正方形，再以弓形的高

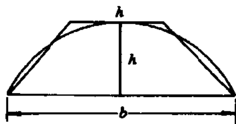


图 3・1・12

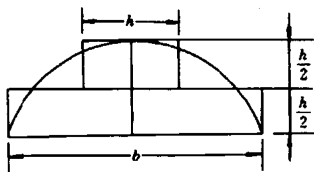


图 3・1・13

和弦分别为边作一长方形，取两形面积的平均值作为弓形的面积。即

弓形面积$=1/2\cdot(b\cdot h+h\cdot h)$，

或　弧田面积=1/2・(弦×矢+矢×矢)。

这种算法虽然是《九章算术》所载弧田算法，但是取两形面积平均值的办法则为《九章算术》所缺。

第三种猜测为，过弓形高的中点，以弓形的弦及弓形的半高为边作长方形，再以弓形的全高及半高为边作长方形，取此两个长方形的面积和即是弓形的面积。即

弓形面积$=b\cdot(h/2)+h\cdot(h/2)$

$=1/2\cdot(b\cdot h+h\cdot h)$，

或　弧田面积=弦×半矢+矢×半矢

=1/2・(弦×矢+矢×矢)。

这种算法虽有割补术的意味，但《九章算术》作者能否添加括号，还需要证实。

以上三种猜测，除第一种较为自然外，其它两种似有雕琢痕迹，而古代对于分配律的运算也有不少例证。因此，我们赞同第一种猜测。

在弧田术文之下，刘徽写出注文为：

“方中之圆，圆里十二觚之幂，合外方之幂四分之三也。中方合外方之半，则朱实合外方四分之一也。弧田，半圆之幂也，故依半圆之体而为之术。以弦乘矢而半之则为黄幂，矢自乘而半之为二青幂，青黄相连为弧体。弧体法当应规，今觚面不至外畔，失之于少矣。圆田旧术以周三径一为率，俱得十二觚之幂，亦失之于少也。与此相似，指验半圆之幂耳。若不满半圆者，益复疏阔。宜依勾股锯圆材之术，以弧弦为锯道长，以矢为锯深，而求其径。既知圆径，则弧可割分也。割之者半弧田之弦以为股，其矢为勾，为之求弦，即小弧之弦也。以半小弧之弦为勾，半圆径为弦，为之求股，以减半径，其余即小弧之矢也。割之又割，使之极细。但举弦矢相乘之数，则必近密率矣。然于算数差繁，必欲有所寻究也。若但度田，取其大数，旧术为约耳。”

刘徽作一圆外切正方形，设其面积为 A，内接正方形面积为 B，由前论可知内方为外方之半，即 $B=1/2\cdot A$；再作圆内接正 12 边形，将正 12 边形分成 12 个等积三角形，其中四个取为黄幂，分割一黄三角形为两部分，使补入右上角，则成外方的四分之一，故得：

$$S=3/4\cdot A,$$

即“圆里十二觚之幂，合外方之幂四分之三也。”再取内方之半作为“朱实”，显然“朱实合外方四分之一也”，即

$$1/2\cdot B=1/4\cdot A。$$

刘徽又以半圆之弧田立论，设圆半径为 r，弧田弦为 $2r$，矢为 r；则得

$$（弦\times矢）/2=1/2\cdot 2r\cdot r=r\cdot r=1/4\cdot A，即四黄幂；$$

$$（矢\times矢）/2=1/2\cdot r\cdot r=1/8\cdot A，即二青幂。$$

两项相加，按理应得此弧田面积，但这样计算结果没有落在圆弧处，即未及正 12 边形之处，因而所得结果小于此弧田面积。即

“青黄相连为弧体。弧体法当应规，今觚面不至外畔，失之于少矣。”也即

$$(弦\times矢)/2+(矢\times矢)/2=1/2\cdot r\cdot r+r\cdot r$$

$$=3/2\cdot r\cdot r=3/8\cdot A<S。$$

若按古率$\pi=3$计算，则得正12边形面积之半，也小于半圆之弧田面积；若取小于半圆之弧田，其误差更大。于是，刘徽提出化曲为直的无限逼近求法：

根据《九章算术》所给弧田条件为弦矢，没有圆径，所以刘徽提出用勾股章“勾股锯圆材之术”以求圆径。即

$$圆径=(半锯道长)/锯深+锯深$$

$$=(b/2)/h+h,$$

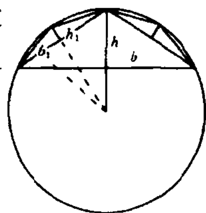


图 3·1·14

然后在弓形内以弦为底，以弧之中点为顶作内接等腰三角形，又在其余各小弓形内也作等腰三角形；如此继续作下去，则得分别以弦b_1，b_2，b_3，b_4，…为底，以其对应的矢h_1，h_2，h_3，h_4，…为高的各等腰三角形面积；将这些等腰三角形面积依次相加，则其和逐渐逼近于弓形面积。其中以弓形弦为底，矢为高的等腰三角形面积为$S=1/2\cdot bh$，等分弓形弧，于两小弓形内作以小弓形弦为底，以小矢为高的小等腰三角形面积为$2S_1=b_1h_1$，再等分弓形弧，于四个小弓形内各作小等腰三角形，四个小等腰三角形面积为$4S_2=2b_2h_2$，依此下去，即得各小三角形面积；在这段注文里刘徽还指出推求小弦及小矢的算法，表示以现代形式，即

$$小弦=(大弦/2)+大矢=b=(b/2)+h,$$

$$小矢=半径-(半径)-(小弦/2)=h=r-[r-(b/2)]。$$

照这样分割下去，将所得三角形面积依次相加即得

$$S=1/2\cdot bh+b_1h_1+2b_2h_2+4b_3h_3+\cdots+2^{n-1}b_nh_n+\cdots$$

至此，刘徽注乃称，“割之又割，使至极细。但举弦矢相乘之数，

则必近蜜率矣。”这就是说，使分割到极细，将全部三角形面积加起来，则逼近弧田面积的精密之值。但是，在实际计算中，这种算法过于繁琐，如果根据精度的要求，仅仅推求田地的面积而只要大数的话，则《九章算术》弧田旧术还是比较简便的。于是，他注说“然于算数差繁，必欲有所寻究也。若但度田，取其大数，旧术为约耳。”

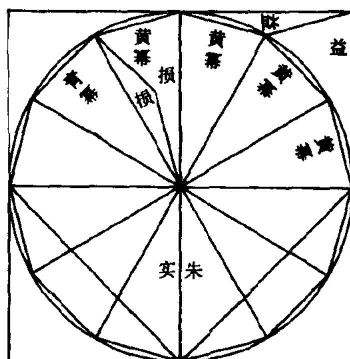


图 3·1·15

所采用的弧田图，是依据清人戴震补绘的图，我们以为这图是符合刘徽原意的；因为，刘徽虽未说明“以弦乘矢而半之则为黄幂”是几“黄幂”，但却说明“矢自乘而半之为二青幂”，而“二青幂”实则等于外方的八分之一，即 $1/8 \cdot A$。有人将弧田刘徽注“中方合外方之半，则朱实合外方四分之一也”改为“中方合外方之半，则青实合外方四分之一也”；并把弧田图改绘成正 12 边形以内，内方之外的部分为“青幂”或“青实”，这样一改，不但先算出“青实”等于外方的四分之一，即 $1/4 \cdot A$，而且后算出“青幂”为外方的八分之一，即 $1/8 \cdot A$；同时既未说明“青实”与“青幂”的关系，又无法解释刘徽注“矢自乘而半之为二青幂”之“二”字；在刘徽注下文里，又改“弧体”为“觚体”，也是值得

商榷的。

三、环田

《九章算术·方田》第37，38问分别为：

(37) 今有环田，中周九十二步，外周一百二十二步，径五步。问：为田几何？

答曰：二亩五十五步。

术曰：并中外周而半之，以径乘之为积步。

(38) 又有环田，中周六十二步四分步之三，外周一百一十三步二分步之一，径十二步三分步之二。问：为田几何？

答曰：四亩一百五十六步四分步之一。

术曰：置中外周步数，分母、子各居其下。母互乘子，分母相乘，通全步，纳分子。以中周减外周，余半之，以益中周。径亦通分纳子，以乘周为实。分母相乘为法，除之为积步，余积步之分。以亩法除之，即亩数也。

"环田"就是圆环形的土地，也可释为圆环形；其第37问是整圆环形，而第38问为环缺形。其中"径"是指圆环的外圆与内圆之半径差，也可称为环宽。根据《九章算术》所载术文，易知环田面积算法，设外周为C，中周为C'，外圆半径为R，中圆半径为r，表示为现代形式，则得：

$$\text{环田面积}=[(\text{外周}+\text{中周})/2]\times(\text{环径})$$
$$=[(C+C')/2]\times(R-r),$$

或
$$\text{环田面积}=\{\text{中周}+(\text{外周}-\text{中周})/2\}\times(\text{环径})$$
$$=[C'+(C-C')/2]\times(R-r),$$

在第37问经文"径五步"下刘徽注称：

"此欲令与周三径一之率相应，故言径五步也。据中外周，以徽术言之，当径四步一百五十七分步之一百二十二也。"

在第38问经文"径十二步三分步之二"下刘徽注称：

“此田环而不通匝，故径十二步三分步之二。若据上周求径者，此径失之于多，过周三径一之率，盖为疏矣。于徽术当径八步六百二十八分步之五十一。”

根据以上两段刘徽注，即知刘徽给出推求环径的算法，即：

$$环径=(外周-中周)/(2\pi)=(C-C')/(2\pi),$$

或　　$$环径=外圆半径-中圆半径=R-r。$$

第37问中周为92步，外周为122步，若按徽术$\pi=157/50$计算，则得环径为：

$$环径=(122-92)/(2\times157/50)=4+122/157(步)。$$

而第38问中周为（62+3/4）步，外周为（113+1/2）步，若按徽术$\pi=157/50$仿上法计算，则得：

$$\begin{aligned}所谓环径&=[(113+1/2)-(62+3/4)]/(2\times157/50)\\&=8+51/628,\end{aligned}$$

于是刘徽注说“于徽术当径八步六百二十八分步之五十一”。但是，刘徽这一算法是错误的，因为他既然说“此田环而不通匝”，则不应该仍用由整圆环推求“环径”的算法计算；而接着刘徽注的李淳风注也错误地说“依周三径一考之，合径八步二十四分步之一十一。依密率，合径八步一百七十六分步之一十三。”可见，刘徽及李淳风对推求第38问“环径”的算法都是错误的。至于刘徽注说“若据上周求径者，此径失之于多，过周三径一之率，盖为疏矣。”刘徽注的这一论述，也不确实，因为他仍是在按整环的基础上推求“环径”而得到这一论断的。这一点不能说不是刘徽的一个疏忽。

至于刘徽注何以说“此田环而不通匝”，刘徽未说明原因，所以不便强为之说。不过可用现代算法给予论证如下：

设外周为C，中周为C'，外周半径为R，中周半径为r，依经文“径十二步三分步之二”则有：

$$R-r=12+2/3,\qquad 即\qquad R=12+2/3+r。$$

又按推求环田的圆心角的算法，得

$C/R=C'/r$，　　　即

$R=[(113+1/2)/(62+3/4)]\cdot r$，

于是求得外周和中周的半径分别为：

$R=28+200/609$，　　　　$r=15+409/609$。

此环径即是：　$R-r=12+2/3$。

而此环田的圆心角则为：

$C/R=(113+1/2)/(28+200/609)=4.0065$（弧度）；

或　　$C'/r=(62+3/4)/(15+409/609)=4.0065$（弧度）。

如果按“径十二步三分步之二”计算，刘徽注“此田环而不通匝”是正确无误的。

第37问术文下刘徽注为：

“此田截齐中外之周为长。并而半之者，亦以盈补虚也。此可令中外周各自为圆田，以中圆减外圆，余则环实也。”

第38问术文下刘徽注为：

“按此术，置中外周步数于上，分母、子于下。母乘子者，为中外周俱有余分，故以互乘齐其子，母相乘同其母。子齐母同，故通全步，纳分子。并而半之者，以盈补虚，得中平之周。周则为纵，径则为广，故广纵相乘而得其积。既合分母还须分母出之，故令周径分母相乘而连除之，即得积步。不尽，以等数除之而命分。以亩法除积步，得亩数也。”

第37问术文下刘徽注为“此田截而中之周则为长”，舛误不通。戴震校改为“此田截齐中外之周，周则为长。”也有缺欠处。钱校本改为“此田截齐中外之周为长。”今从钱校本。这句注文的意思是说，把环田的中外周“引而伸之”，使之成为直线段，把环田变形为与之等积的等腰梯形，而环田的中外周则变成等腰梯形的上下底，再将梯形的上下底即环田的中外周“并而半之”，这样就可“以盈补虚”，得到证明，因而可得“以盈补虚，得中平之周。周

则为纵，径则为广，故广纵相乘而得其积。”

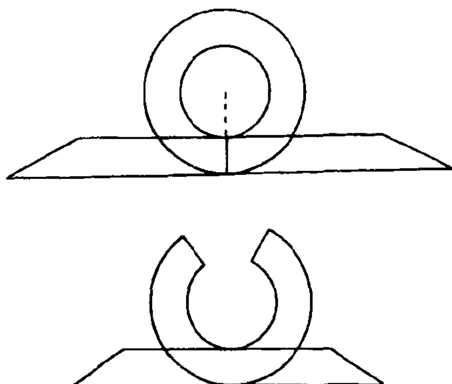


图 3·1·16

从微积分的观点来看，环田或圆环很难变成与之等积的等腰梯形。但是，由曲池术刘徽注“引而伸之，周为袤”的观点来看，把环田中外周引伸成为直线段，使变成与之等积的等腰梯形，既是符合刘徽的直观原则，又符合刘徽的原意，还符合当时的社会实际水平。如果把环田分割成若干个曲边等腰梯形，当个数增多时，利用极限观念推求环田的面积，这种算法是可行的，但在《九章算术》中很难找到有关证据。

刘徽注还说“此可令中外周各自为圆田，以中圆减外圆，余则环实也。”虽然从算理而论，这是十分正确的，根据《九章算术》及刘徽注所述由圆周求圆面积的算法，可以求得环田的面积，但是，这一算法在当时是很难转变为环田术文算法的。

至于把“环田是由‘周’叠积而成”的，这一看法是值得商榷的。

南宋版《九章算经》第 38 问之术文为：“密率术曰：置中外周步数，分子各居其下，母互乘子，通全步纳分子，以中周减外周，余半之。径亦通分纳子，以乘为密实。分母相乘为法，除之

为积步。余积步之分，以亩法除之，即亩数也。”而南宋版刘徽注为“按此术，并中外周步数于上，分母子于下。母乘子者，为中外周俱有分，故以互乘，齐其子，母相乘，同其母，子齐母同，故通全步纳分子，半之知以盈补虚，得中平之周，周则纵，径则为广，故广纵相乘而得其积。既合分母，还须分母出之，故令周径分母相乘而连除之，即得积步，不尽，以等数除之而命分。以亩法除积步，得亩数也。”

由上述术文来看，舛误不可通，戴震校改之后，遂文从字顺，今从之。但有人又改为“密率术曰：并中外周步数，分母子各居其下。母互乘子；通全步，纳分子。以中周减外周，余半之。径亦通分纳子。以乘周为密实，径为法。”并认为这是说由环田中外周及环径推求圆周（弧）与直径比率的算法。即公式：

圆周（弧）：圆径＝1/2（外周－中周）：环径.

还认为这是由古代中算家所熟知的比率算法的自然推出，即是

圆周(弧)：圆径＝外周：外径＝中周：内径，

推出　圆周(弧)：圆径

＝1/2(外周－中周)：1/2(外径－中径)，

又知　环径＝1/2（外径－内径），

于是可以推出上述“密率公式”。

以上所述各个公式，对整圆来说是正确无误的，但对环缺或扇形来说，未必没有问题。因而需要进一步研究。就以第 37 为例说明如下：

外周为 122 步，中周为 92 步，环径为 5 步，由上述公式得：

圆周：圆径＝1/2(122－92)：5＝3：1，

所以刘徽作出判断：“此欲令与周三径一之率相应”。但是，如果对此问的中周、外周各取其 3/4 倍或 n/m 倍，由此公式推得：

圆周：圆径＝1/2[3/4(122－92)]：5

＝1/2[(91＋1/2)－69]：5＝(2＋1/4)：1。

可见，其比值并非“周三径一”之率。再以第38问为例，如前所述，已求得外周，中周半径分别为：

$R=28+200/609$，　　$r=15+409/609$。

按“周三径一”之率，可得外圆圆周，中圆圆周分别为：

$C=6(28+200/609)=169+591/609$，

$C'=6(15+409/609)=95+18/609$。

根据上述公式则得：

圆周：圆径

$=1/2[(169+200/609)-(95+18/609)]:(12+2/3)$

$=3:1$。

显然是符合“周三径一”之率的。请注意，这并不是循环论证，而是由于“此田环而不通匝”所使然。如果按徽术进行计算，也得同一结果，即将符合“周得一百五十七，径得五十”之率。

就一般情况来说，设外圆周为C，中圆周为C'，外圆半径为R，中圆半径为r，对整圆，整圆环而论，

若　圆周：圆径＝外圆周：外圆径＝中圆周：中圆径，

则　圆周：圆径

＝1/2（外圆周－中圆周）：1/2（外圆径－中圆径）；

即是由　圆周：圆径$=C:2R=C':2r=\pi$，

可推出　圆周：圆径$=1/2(C-C'):(R-r)=C:2R$

$=C':2r=\pi$。

这是正确无误的，但是，对环缺或扇形来说，则会出现下列情形，即：

设环缺的外周是外圆周C的n/m倍，中周是中圆周C'的n/m倍，外圆径为$2R$，中圆径为$2r$，

由环缺得　外周：外径＝中周：中径，

导出　外周：外径＝中周：中径

＝1/2(外周－中周)：1/2(外径－中径)。

即是由　$(n/m)C : 2R=(n/m)C' : 2r\neq\pi$，

可导出　$1/2[(n/m)(C-C')] : (R-r)=(n/m)C : 2R$

$$=(n/m)C' : 2r\neq\pi。$$

由此可见，不能轻易而错误地下断语。更不能轻易地根据南宋版“密实”之“密”一字校改注文，使之成为推求所谓“密率公式”的注文。刘徽在“按此术”以下一段注文，不可讳言，毫无疑问是注释这段术文的，但如何解释“按此术”以下一段注文，则是一个十分重要而关键的问题。因而需要慎重从事。

以上所论，就是说明了刘徽化曲为直及截割原理的初步论述。

第二章 刘徽对体积理论的论述

由于古代对粮食的囤积、粮仓的建造、河堤的修建、城墙的筑造，人们逐渐形成了体积的观念，以体积的观念作为基本概念；并以长方体的体积算法作为基本算法，从而在《九章算术·商功》中主要论述了立体图形的体积算法，它的论述方式与方田章的论述大体相同，也是由简单到复杂，先直线型立体后圆型立体。商功章所论各种体积算法都是正确无误的。方田章里首先明确了长方形及正方形的面积算法，然后推导有关图形的面积算法；而商功章虽没有直接论述长方体及正方体的体积算法，但却在多处使用了长方体及正方体的体积算法，好像是把长方体及正方体的体积算法作为已知的算法。然后再论述其它各种直线型立体及各种圆型立体的算法；而刘徽注文则论证了各种立体体积算法的正确性。

第一节 刘徽使用“出入相补”原理对体积理论的阐述

商功章首先论述了城、垣、堤、沟、堑、渠的体积或容积的算法，其术文为：

术曰：并上、下广而半之，以高若深乘之，又以袤乘之，即积尺。

在术文之后，《九章算术》给出六问，用以计算其体积或容积，即：

(2) 今有城下广四丈，上广二丈，高五丈，袤一百二十六丈

五尺。问：积几何？

答曰：一百八十九万七千五百尺。

(3) 今有垣下广三尺，上广二尺，高一丈二尺，袤二十二丈五尺八寸。问：积几何？

答曰：六千七百七十四尺。

(4) 今有堤下广二丈，上广八尺，高四尺，袤一十二丈七尺。问：积几何？

答曰：七千一百一十二尺。

(5) 今有沟上广一丈五尺，下广一丈，深五尺，袤七丈。问：积几何？

答曰：四千三百七十五尺。

(6) 今有堑上广一丈六尺三寸，下广一丈，深六尺三寸，袤一十三丈二尺一寸。问：积几何？

答曰：一万九百四十三尺八寸。

(7) 今有穿渠上广一丈八尺，下广三尺六寸，深一丈八尺，袤五万一千八百二十四尺。问：积几何？

答曰：一千七万四千五百八十五尺六寸。

在术文“并上、下广而半之”之下，刘徽注称：“损广补狭”。在术文之末，刘徽又注称

“按此术，‘并上、下广而半之’者，以盈补虚，得中平之广，以高若深乘之，得一头之立幂。‘又以袤乘之’者，得立实之积，故为积尺。”

由于“城’、“垣”、“堤”、“沟”、“堑”、“渠”的形状都是底为等腰梯形的直棱柱，按其底来说，可以利用“出入相补”原理，化等腰梯形为长方形。此长方形的宽固然是梯形的高或宽，而其长则是由“损广补狭”得到梯形上、下底或左、右底相加和的一半；即是刘徽注所说“以盈补虚，得中平之广”。这里所说“中平之广”，就是梯形两底的平均值，而“中平”即是算术平均值的意

思。如方田章圭田术刘徽注称："中平之数"。又如商功章穿地术刘徽注称："并而半之，即为广狭之中平。今先得其中平，故又倍之，知两广全也"。再如盈不足章良马术刘徽注称："中平里"、"中平之积"等。可见"中平"确是算术平均的意思。在这里，当刘徽求得"中平之广"以后，再乘以高或深，即得此棱柱的底面积，即"一头之立幂"。然后再乘以袤，即得此棱柱的体积，即"立实之积"。因而，不难发现刘徽深切认识到棱柱的体积就是底面积与高或深的乘积。(如图 3·2·1、图 3·2·2)

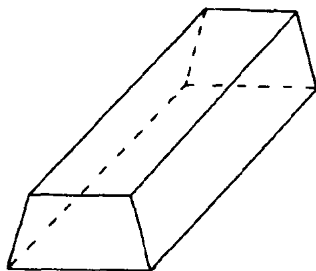


图 3·2·1



图 3·2·2

根据《九章算术》所载，易知"城"、"垣"、"堤"、"沟"、"堑"、"渠"的体积算法公式为：

城垣体积＝1/2×(上广＋下广)×高×袤。

以往论者，以为此处所说"以盈补虚"，是将底为等腰梯形的直棱柱直接移补成底为长方形的直棱柱，这无疑是一种误解。另外也有人认为"得一头之立幂，又以将乘之者，得立实之积"。是"积幂而成体"；我们以为，这未必不是另一种误解，若仅就其字面而论，在这里没有发现刘徽注有"积幂而成体"一类的词句，因而很难得出刘徽有"积幂而成体"或"积面成体"的结论。

我们以为，在刘徽论证平面图形面积时，是把长方形面积或正方形面积算法等于其相邻两边的乘积作为公理看待的，对于其

它直线型平面图形面积算法的推导，则是利用出入相补原理，使之变为与之等积的长方形，用长方形面积算法进行推证的，其中并未发现有所谓“积线成面”的想法。在刘徽论证立体图形体积时，也是把长方体体积或正方体体积算法等于其三度乘积或底面积乘高作为公理看待的，而对于一些棱柱体体积算法的推导，则是把底化为与之等积的长方形进行推导的，其中并没有所谓“积幂而成体”的想法。除上述刘徽注对“城”、“垣”、“堤”、“沟”、“堑”、“渠”的论证可作为例证外，而商功章第8问也可作为旁证，即

(8)“今有方堡柱，方一丈六尺，高一丈五尺。问：积几何？

答曰：三千八百四十尺。

术曰：方自乘，以高乘之，即积尺。”

在这一问中，“方堡柱”即是底为正方形的直棱柱，其术文“方自乘”就是底面积，再乘以高，即得其体积。在这里，刘徽没有给予术文的注解文字，可能认为是显而易见的事情。

但是，除去直线型柱体体积的推导以外，刘徽确实具有“积幂而成体”的思想，而且在有关注文中，也曾经有明确的记载。关于刘徽对“积幂而成体”或“积面成体”的论述，将在下文讨论。

第二节　刘徽所创造的“刘徽原理”及其证明

为了推证除直线型柱体以外其它直线型立体的体积，在前人的基础上，刘徽提出三种基本几何体，即“堑堵”、“阳马”、“鳖臑”。“堑堵”即是底为直角三角形的直棱柱，如商功章第14问刘徽注称：“邪解立方得两堑堵。虽复椭方，亦为堑堵”。“阳马”即是底为正方形或长方形一侧棱与底垂直的四棱锥，如商功章第15问刘徽注称：“阳马之形，方锥一隅也。今谓四柱屋隅为阳马”。

“鳖臑”即是侧面都是直角三角形的四面体，如商功章第15问刘徽注称：“邪解立方得两堑堵。邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑”。(如图3·2·3、图3·2·4、图3·2·5)

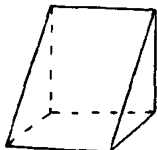


图3·2·3

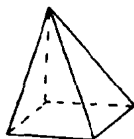


图3·2·4



图3·2·5

刘徽为了推证直线型立体的体积算法，于是提出三种基本几何体，其中“堑堵”体积算法为其三度乘积的二分之一，如刘徽注说：“邪解立方得两堑堵。虽复椭方，亦为堑堵，故二而一”。即

堑堵体积＝1/2（长×宽×高），

但是，为了推求阳马、鳖臑的体积算法，刘徽提出“阳马居二，鳖臑居一，不易之率也”。这一提法，称之为“刘徽原理”。刘徽还说：“邪解立方得两堑堵。邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑”。可见，刘徽深知三度分别相等之阳马与鳖臑体积相加之和为一堑堵体积；而阳马与鳖臑体积之比为二比一。即

阳马体积＋鳖臑体积＝堑堵体积；

阳马体积：鳖臑体积＝2：1。

前一问题，即阳马与鳖臑体积之和为堑堵体积，是十分明显的。如果能证明后一问题的正确性，即证明了阳马与鳖臑体积之比为二比一，也即证明“刘徽原理”的正确性；则不难推出阳马、鳖臑的体积算法。据此，刘徽注说：

“使鳖臑广、袤、高各二尺，用堑堵、鳖臑之棊各二，皆用赤棊。又使阳马之广、袤、高各二尺。用立方之棊一，堑堵、阳马之棊各二，皆用黑棊。棊之赤、黑，接为堑堵，广、袤、高各二尺。于是中效其广、袤，又中分其高，令赤、黑堑堵各自适当一方，高一尺方一尺，每二分鳖臑则一阳马也。其余两端，各积本

体，合成一方焉。是为别种而方者率居三，通其体而方者率居一。虽方随棊改，而固有常然之势也。按余数具而可知者有一、二之别，即一、二之率定矣。其于理也岂虚矣。若为数而穷之，置余广、袤、高之数各半之，则四分之三又可知也。半之弥少，其余弥细。至细曰微，微则无形。由是言之，安取余哉。数而求穷之者，谓以情推，不用筹算"。

刘徽按上面所述，利用极限观念证明了"刘徽原理"。即是取两个赤色堑堵模型，两个赤色鳖臑模型，使拼接成一个广、袤、高各二尺的赤鳖臑；再取一个黑色立方模型，两个黑色堑堵模型，两个黑色阳马模型，使拼接成一个广、袤、高各二尺的黑阳马；然后将赤鳖臑与黑阳马相合拼接成一个广、袤、高各二尺的"赤黑堑堵"。中分此"赤黑堑堵"的广、袤、高，则得小黑堑堵二，小赤堑堵二，小黑立方一，和小赤鳖臑二，小黑阳马二；再将两个小黑堑堵拼接成小黑立方一，将两个小赤堑堵拼接成小赤立方一，都是"高一尺，方一尺"，连同原有小黑立方一，共计三立方。在这三立方中，黑立方居二，赤立方居一，也就是属于阳马者二，而属于鳖臑者则一；即两份鳖臑体积相当于一份阳马体积；即是"每二分鳖臑则一阳马也"。此外尚有小赤鳖臑二与小黑阳马二，可拼接成"小赤－黑堑堵"二，这两个"小赤－黑堑堵"，又可拼接成小立方一；连同前面三立方，共计四立方；在这四立方中，得自阳马或鳖臑的立方者居三，而得自与原"赤黑堑堵"相似的堑堵拼合成立方者则居一。刘徽认为，不拘如何改变这些模型的大小形状，必有这种常然的关系，即"固有常然之势也"。在前面所述三立方中，属于黑阳马者率居二，属于赤鳖臑者率居一，即是"有一、二之别"；也就是"一、二之率定矣"。若再中分"小赤－黑堑堵"的广、袤、高，其中四分之三是可以推算的。如果按照这样分割下去，则"半之弥少，其余弥细。至细曰微，微则无形"。于是利用极限观念即可证明了阳马与鳖臑体积之比为二比

一。刘徽在进行了一次分割之后，并没有再次进行分割，而是按照“情推”的，也就是用极限观念以及数学原理推导的。因而即是证明了“刘徽原理”的正确性。(如图3·2·6、图3·2·7）即

阳马：鳖臑=2∶1；

又依据阳马与鳖臑体积之和，即

阳马+鳖臑=1/2（长×宽×高)。

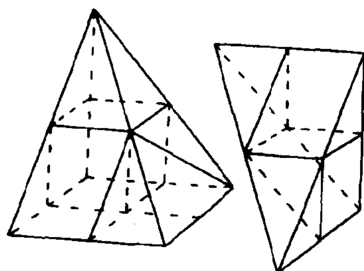


图 3·2·6

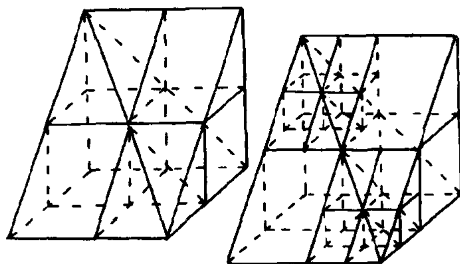


图 3·2·7

于是可得阳马、鳖臑体积算法分别为：

阳马体积=1/3（长×宽×高)；

鳖臑体积=1/6（长×宽×高)。

以上所说，就是刘徽为了推证直线型立体的体积算法，利用三种基本几何体，以及所创造的“刘徽原理”，从而为论证直线型立体的体积算法奠定了理论基础。

在分析讨论刘徽注文中，有人将刘徽注中“中效其广、袤，又中分其高”改为“中分其高，又中效其广”。并认为“‘效’字是没有‘分’的意思的，……，‘中分其高’是不能拼合成一个个小立方的，即使再‘中分其广’也不能拼合成一个个的小立方，……，如果拼成一个个的小立方，何言‘高一尺，方二尺，每二分鳖臑则一阳马也’。”于是便把“赤黑堑堵”上、下两层分离开来；然后再将上层之棋内、外两堑堵位置交换，最后，再将上层之棋翻转180度与下层相拼，使赤黑二堑堵合成一个“高一尺，方二尺”的长方体。这种说法，表面上虽然能自圆其说，但实际上可商榷之处确实不少。例如，即使“效”字没有分的意思，但总不便解释“效”字为“位置交换”和“翻转180度”；即使将刘徽注“中效其广，又中分其高”改成“中分其高，又中效其广”；也不能随便解释“效”字为“位置交换”和“翻转180度”。这种解释既缺乏根据，又难以找寻实例；这种解释是值得商榷的。这里的“效”字，是不是一字误文，还有待进一步考虑。至于将“赤黑堑堵”拼合成一“高一尺，方二尺”的长方体，因为赤鳖臑和黑阳马仍然堆积于一起，所以未必能显而易见有下列两点结论：即“二分赤鳖臑之积相当于一黑阳马之积；构成此长方体的四个方中，由赤鳖臑和黑阳马合成的方占一分，而由别种棋而组成的方占三分”。如果说，在这种“高一尺，方二尺”的长方体中，显见头两点结论“每二分鳖臑则一阳马也”以及“别种而言者率居三，通其体而方者率居一”的话；可不可以退一步说，在“赤黑堑堵”中，也就是赤鳖臑和黑阳马仍然堆积在一起的情况之下，是不是也可以说显而易见有上述两点结论？当然，这种说法是站不住脚的，因而前面的说法恐未必符合刘徽的原意。（如图3・2・8、图3・2・9）

关于“令赤、黑堑堵各自适当一方”的理解，一般认为：将“赤黑堑堵”分割一次以后，赤堑堵与赤堑堵合成一方，黑堑堵与

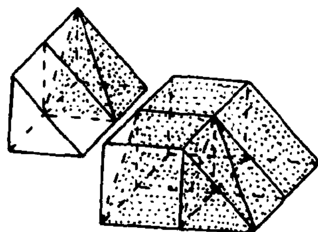


图 3·2·8

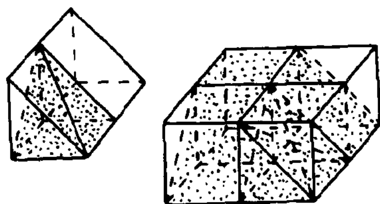


图 3·2·9

黑堑堵合成一方：或者赤堑堵与黑堑堵相配共合成两方；因为原来设计之“赤黑堑堵”的三度等长，所以只有这两种拼合方法。又因为刘徽注强调“各自适当一方”，所以我们以为是赤堑堵与赤堑堵合成一方，而黑堑堵与黑堑堵合成一方。最近，有人认为，赤堑堵与黑堑堵相配共合成两方；虽然这种说法可以适用于三度不等的情况，但无法解释刘徽注“各自适当一方”之“各自”二字。可见，这种说法未必符合刘徽注的原意。另外，如果把“赤黑堑堵”分成两层，将上层“交换位置”再“翻转 180 度”，使之成为所谓“高一尺，方二尺”长方体的话，不仅错误地使赤堑堵与黑堑堵相配拼合成两方，而且还错误地理解刘徽注“令赤、黑堑堵各自适当一方”之“一方”，更无法说明这一“一方”与“其余两端各积本体，合成一方焉”之“一方”以及与“‘高一尺，方二尺’的长方体”之间关系。所以，以上的说法是难以令人值信的。

以上所论，就是刘徽所创造的“刘徽原理”及其证明过程。刘

徽所以创造“刘徽原理”的原因，其目的就是为了推证阳马、鳖臑的体积算法；并为了推证各种直线型立体的体积算法。正如刘徽注所说“鳖臑之物，不同器用。阳马之形，随修短广狭。然不有鳖臑，无以审阳马之数，不有阳马，无以知锥亭之类，功实之主也”。可见，刘徽所创造的“刘徽原理”，是推导各种直线型立体的体积算的理论基础。

第三节　“刘徽原理”的应用及有限分割法

在《九章算术・商功》中，所列直线型立体，除上述城、垣、堤、沟、堑、渠以及方堡柱外，尚有方亭、方锥、羡除、刍甍、刍童、盘池、冥谷等直线型立体；其中“方亭”，即是今之正四棱台；“方锥”，即今之正四棱锥；“羡除”，就是有三侧面为等腰梯形、另两侧面为勾股形之五面体；“刍甍”，就是下底为长方形之楔形体；“刍童”、“盘池”、“冥谷”，都是底为长方形之拟台体。刘徽对这些直线型立体的体积算法的证明，都采用“有限分割法”，就是将这些立体进行有限次分割，使之分割成三种基本几何体，即分割成堑堵、阳马、鳖臑，再按这三种基本几何体的体积算法，推证这些直线型立体的体积算法。例如商功章第10问为：（如图3・2・10）

（10）今有方亭，下方五丈，上方四丈，高五丈。问：积几何？

答曰：一十万一千六百六十六尺太半尺。

术曰：上、下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一。

刘徽为了推证方亭的体积算法，乃将方亭分割为立方、堑堵、阳马，根据立方、堑堵、阳马的体积算法，推证此方亭的体积算法。刘徽注称：

“假令方亭，上方一尺，下方三尺，高一尺，其用棋也中央立

方一，四面堑堵四，四角阳马四。上、下方相乘为三尺，以高乘之，得积三尺；是为得中央立方一，四面堑堵各一。下方自乘为九，以高乘之，得积九尺；是为中央立方一，四面堑堵各二，四角阳马各三也。上方自乘，以高乘之，得积一尺，又为中央立方一。凡三品棋，皆一而为三。故三而一得积尺。”

此外，刘徽又提出另一种算法。刘徽注称：

“为术又可令方差自乘，以高乘之，三而一，即四阳马也。上、下方相乘，以高乘之，即中央立方及四面堑堵也。并之，以为方亭积数也。”


图 3・2・10


图 3・2・11

刘徽虽然是以举例验证方亭的体积算法，但并不失为推证方亭体积算法的一般性。也就是说，不论方亭的形状、大小，分割方亭为立方、堑堵、阳马各立体和的方法是永远可行的。此外，刘徽所创造的另一算法，也具有推求方亭体积算法的一般性。商功章第 11 问为：（如图 3・2・11）

（11）今有方锥，下方二丈七尺，高二丈九尺。问：积几何？

答曰：七千四十七尺。

术曰：下方自乘，以高乘之，三而一。

刘徽也是采用分割的方法，把方锥分割成四阳马，以四阳马的体积算法推证方锥的体积算法；或用十二阳马，合成三方锥，而方锥体积则为十二阳马体积的三分之一，也即四阳马之积。刘徽注称：

“按此术，假令方锥下方二尺，高一尺，即四阳马。如术为之，用十二阳马，成三方锥，故三而一，得方锥也”。

商功章第18问为：(如图3·2·12、图3·2·13)

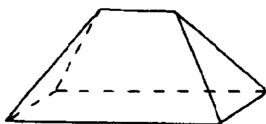


图 3·2·12

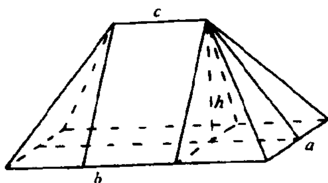


图 3·2·13

(18) 今有刍甍，下广三丈，袤四丈，上袤二丈，无广，高一丈。问：积几何？

答曰：五千尺。

术曰：倍下袤，上袤从之，以广乘之，又以高乘之，六而一。

刘徽也是举以例证，用分割方法推证刍甍体积算法，他把刍甍看成是堑堵、阳马的合成体，以堑堵、阳马的体积算法证明刍甍的体积算法。刘徽注说：

"正斩方亭两边，合之即刍甍之形也。假令下广二尺，袤三尺，上袤一尺，无广，高一尺，其用綦也，中央堑堵二，两端阳马各二。倍下袤，上袤从之为七尺，以广乘之，得冪十四尺，阳马之冪各居二，堑堵之冪各居三。以高乘之，得积十四尺。其于本棋也，皆一而为六，故六而一，即得。"

刘徽假设刍甍下广二尺 (a)，袤三尺 (b)，上袤一尺 (c)，高一尺 (h)。将此刍甍看作是由中央堑堵二与两端阳马四之合成体。按术计算，则得

$$[2(b-c)a+3ac]=(2b+c)\times a=14(\text{平方尺}),$$

此面积可看作是六堑堵底面积与八阳马底面积之和。因刍甍是由二堑堵、四阳马所合成，所以此面积可看作是堑堵底面积之三倍与阳马底面积之二倍相加的和。也即其面积之比为3∶2。即"阳马之冪各居二，堑堵之冪各居三"。上式乘以高，即得

$$(2b+c)\times a\times h=14(\text{平方尺})。$$

此式相当于十二堑堵与二十四阳马体积之和。这十二堑堵与二十四阳马恰好是合成刍甍二堑堵及四阳马之六倍，故得此刍甍体积算法为：

$$V=1/6\times(2b+c)\times a\times h。$$

刘徽虽用例子证明刍甍的体积算法，但其证明之理论及步骤都具有一般性。可看作是一般证法。此外，刘徽还给予刍甍体积的另一算法，刘徽注称：

“亦可令上、下袤差乘广，以高乘之，三而一，即四阳马也；下广乘上袤而半之，高乘之，即二堑堵；并之，以为刍甍积也”。按术即得：

$$\text{四阳马体积}=1/3\times(b-c)\times a\times h,$$

$$\text{二堑堵体积}=1/2\times(ac)\times h。$$

上两式相加即

$$\begin{aligned}\text{刍甍之体积}&=1/3\times(b-c)\times a\times h+1/2\times(ac)\times h\\&=1/6\times(2b+c)\times a\times h。\end{aligned}$$

刘徽所以导出刍甍的这种体积算法，其原因可能是把刍甍看作是四阳马与二堑堵的合成体，先分别计算阳马、堑堵的体积，然后相加即得刍甍的体积。对于刍童体积算法的推导，刘徽也采用类似的办法，如商功章第19问：(如图3・2・14)

(19)今有刍童，下广二丈，袤三丈；上广三丈，袤四丈；高三丈。问：积几何？

答曰：二万六千五百尺。

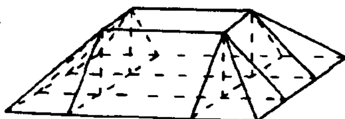


图 3・2・14

在此问之前，商功章列有刍童术，即

“刍童、曲池、盘池、冥谷，皆同术。

术曰：倍上袤，下袤从之；亦倍下袤，上袤从之；各以其广

乘之，并，以高若深乘之，皆六而一。”

为了证明此术的正确性，刘徽仍然分割刍童为三种基本几何体，借以推证其体积算法。在此术文之下，刘徽仍然举例注称：

“假令刍童上广一尺，袤二尺，下广三尺，袤四尺，高一尺；其用棋也，中央立方二，四面堑堵六，四角阳马四。倍下袤为八，上袤从之为十，以高、广乘之，得积三十尺；是为得中央立方各三，两端堑堵各四，两旁堑堵各六，四角阳马亦各六。复倍上袤，下袤从之为八，以高、广乘之，得积八尺；是为得中央立方亦各三，两端堑堵各二。并两方三品棋，皆一而为六，故六而一，即得。”

刘徽将此刍童分割成二立方、六堑堵、四阳马，然后按术文计算，从而证明此刍童的体积算法；认为倍下袤，上袤从之，以高、广乘之，相当于六立方、三十二堑堵、二十四阳马之体积和；而倍上袤，下袤从之，以高、广乘之，则相当于六立方、四堑堵之体积和。共计立方十二、堑堵三十六、阳马二十四；恰好是原刍童分割为二立方、六堑堵、四阳马之六倍，故取其六分之一，即得刍童之体积算法。设此刍童上、下广分别为 a、c，上、下袤分别为 b、d，其高为 h。按刍童术文计算，则得

$$6\text{立方}+32\text{堑堵}+24\text{阳马}=(2d+b)\times c\times h,$$

$$6\text{立方}+4\text{堑堵}=(2b+d)\times a\times h,$$

将以上两式相加，乃得 12 立方、36 堑堵、24 阳马之体积和，相当于此刍童体积之 6 倍，故得刍童体积算法为：

$$V=1/6[(2d+b)\times c\times h+(2b+d)\times a\times h]。$$

当刘徽证毕刍童体积这一算法之后，又提出另外两种算法，刘徽说

“为术又可令上、下广、袤差相乘，以高乘之，三而一，亦四阳马。上、下广、袤互相乘，并而半之，以高乘之，即四面六堑堵与二立方，并之为刍童积。又可令上、下广、袤互相乘而半之，

上、下广、袤又各相乘，并，以高乘之，三而一，即得也。”

根据刘徽所说，即得刍童另外两种体积算法，分别为：

4 阳马体积$=1/3(d-b)(c-a)\times h$，

6 堑堵体积$+2$ 立方体积$=1/2(ad+bc)\times h$，

上两式相加，即得刍童体积为：

$V=1/3(d-b)(c-a)\times h+1/2(ad+bc)\times h$。

此其一。刘徽提出第二种刍童体积算法为：

$V=1/3(ad/2+bc/2+ab+dc)\times h$。

商功章第 21 问、第 22 问分别为盘池、冥谷题，因与刍童同术，所以这里讨论从略。但第 17 问为羡除题，其原文如下：（如图 3·2·15、图 3·2·16）

（17）今有羡除，下广六尺，上广一丈，深三尺，末广八尺，无深，袤七尺。问：积几何？

答曰：八十四尺。

术曰：并三广，以深乘之，又以袤乘之，六而一。

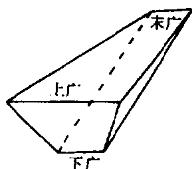


图 3·2·15

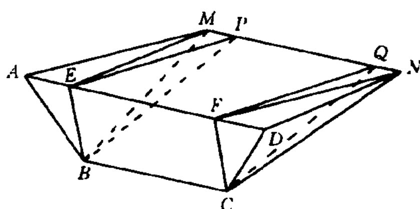


图 3·2·16

“羡除”，就是墓道；也即是进入墓室的坡道；所以其上面平而下面斜，一面与地面垂直。一般说，乃是有三侧面为等腰梯形、其他两面为勾股形之五面体。如刘徽注称，“羡除，实隧道也。其所穿地，上平下邪，似两鳖臑夹一堑堵，即羡除之形”。与地面垂直一面之上宽称为上广，其下宽称为下广，上平面与下斜面交结处之宽称为末广。刘徽是按三广之等与不等进行讨论，并证明羡

除的体积算法。

若按上广、下广、末广之等与不等进行讨论，除三广相等实际是堑堵者外，可分为十二种情况，今胪列如下[①]：(如图3·2·17至图3·2·28)

I_1	上广＝末广＞下广，	I_2	下广＞上广＝末广，
I_3	末广＞上广＝下广，	I_4	上广＝下广＞末广，
I_5	上广＞末广＞下广，	I_6	末广＞上广＞下广，
I_7	上广＞下广＞末广，	I_8	下广＞上广＞末广，
I_9	下广＞末广＞上广，	I_{10}	末广＞下广＞上广，
I_{11}	上广＞末广＝下广，	I_{12}	末广＝下广＞上广。

因为羡除上平面与垂直平面相互垂直，又由几何角度分析，这两面可以相互交换，也就是说，末广与下广可以相互交换。这样交换之后的羡除，只有七种不同情况。也即，因I_1与I_4、I_2与I_3、I_5与I_7、I_8与I_6、I_9与I_{10}的形状相同；故而只有I_1、I_2、I_5、I_8、I_9、I_{11}、I_{12}七种不同情况。

在羡除术的刘徽注中，虽是按三广的长短进行分类讨论，但刘徽只涉及到I_1、I_2、I_{11}、I_{12}四种情况，如刘徽注称："凡堑堵上袤短者，连阳马也"。此即I_1；刘徽注说：(堑堵)"下袤短者，与鳖臑连也"。此即I_2；刘徽注说："上、下两袤相等者，亦与鳖臑连也"。此即I_3也可看为I_2；刘徽注还说："假令用此棊，上广三尺，深一尺，下广一尺，末广一尺，无深，袤一尺。下广、末广皆堑堵之广。上广者，两鳖臑与一堑堵相连之广也。……，所云夹堑堵者，中锥之鳖臑也"。此即I_{11}；刘徽又说："合四阳马以为方锥。邪画方锥之底，亦令为中方。就中方削而上合，全为方锥之半。于是阳马之棊悉中解矣。中锥离而为四鳖臑焉。故外锥亦

① 李继闵.《九章算术》及其刘徽注研究. 西安：陕西人民教育出版社，1990，306～309

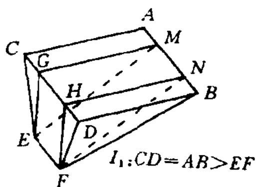


图 3・2・17

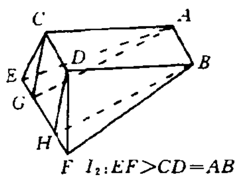


图 3・2・18

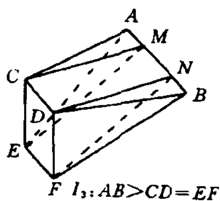


图 3・2・19

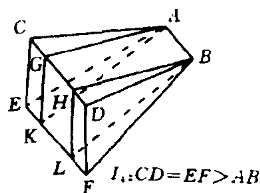


图 3・2・20

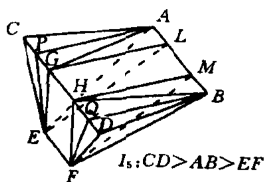


图 3・2・21

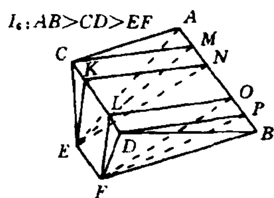


图 3・2・22

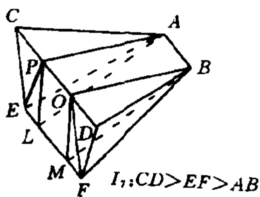


图 3・2・23

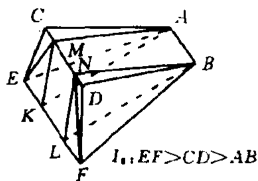


图 3・2・24

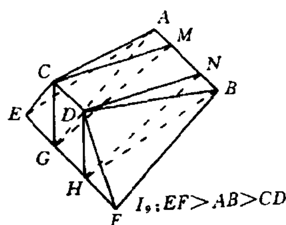


图 3·2·25

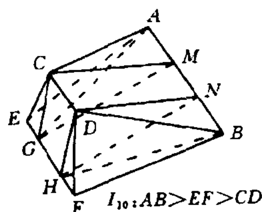


图 3·2·26

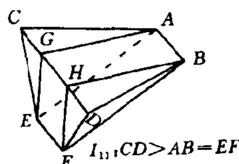


图 3·2·27

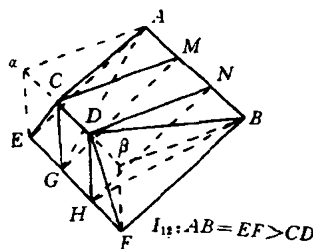


图 3·2·28

为四鳖臑。虽背正异形，与常所谓鳖臑参不相似，实则同也”。其中I_{12}既可看作是堑堵与“外锥鳖臑”相连，也可看作是从大堑堵两旁各减去“中锥鳖臑”而得。因此可以说刘徽顺便讨论了I_{12}的情况。刘徽又说：“按此本是三广不等，即与鳖臑连者。……，合于常率矣”。显然属于I_5，而商功章第17问，则是I_5的特例；至于I_8、I_9两种情况，其所夹之“鳖臑”，也给出了说明，因而可以说，刘徽虽然在某些地方论述得不太严密，但他却把握了问题的关键，他的分类讨论方法，可以说具有一般意义。

各版本刘徽注皆为：“中锥离而为四鳖臑焉。故外锥之半亦为四鳖臑，虽背正异形，与常所谓鳖臑参不相似，实则同也”。有人解释说：“按刘徽所说，沿方锥顶点及底面四边之中点联线作六个截面，割方锥为八个鳖臑。其内部四鳖臑构成中（方）锥，由于

中锥底面积是外锥底面积之半，且二者等高，……，而其余外部四个‘外锥鳖臑’其积亦为‘外锥之半’。”这种解释显然是错误的，因为：既然“合四阳马以为方锥。邪画方锥之底，亦令为中方。就中方削而上合，全为方锥之半”。则可知“中锥”是由方锥生成的，而中锥底面积显然是方锥底面积之半，外锥底面积也是方锥底面积之半；中锥底面积绝对不是“外锥底面积之半”；又因“割方锥为八个鳖臑，其内部四鳖臑构成中锥”，其外部四鳖臑则构成外锥。内部四鳖臑之积是方锥体积之半，而“其余外部四个‘外锥鳖臑’其积亦为”方锥之半；其积并不是也不可能是“外锥之半”。所以，这种理解“由于中锥底面积是外锥底面积之半”及“其余四个‘外锥鳖臑’其积亦为‘外锥之半’。”都是错误的。

各版本刘徽注皆为“中锥离而为四鳖臑焉。故外锥之半亦为四鳖臑”。由词句结构来看，前句既是“中锥离而为四鳖臑”，后句有“亦为四鳖臑”，足证这是相似的两句话；但前、后两句俨然不相称，其中必有误文。由意义来分析，前句所说，可分割“中锥”为四鳖臑，而后句所说，则无法分割“外锥之半”为四鳖臑；可见各版本刘徽注定有舛误文字。今依意校删“外锥之半亦为四鳖臑”之“之半”二字，则前、后语句文从字顺、意义明确。（如图3·2·29、图3·2·30、图3·2·31）

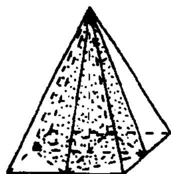


图 3·2·29

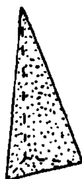


图 3·2·30



图 3·2·31

但是，有人则提出异议说："李潢不懂古义而错改的地方亦不少。商功章羡除术刘徽注原文：'就中方削而上合，全为中方锥之半'及下文'故外锥之半亦为四鳖臑'之两'半'字，其音义皆同'片'。《汉书·李广苏建传》中李陵传：'令军士人持二升糒，一片冰'。如淳曰：'半，读曰片'。师古曰：'半，读曰判。判，大片也'。刘徽此注是说：合成一方锥的四阳马沿中方削而上合分解后，里面的四个鳖臑全都是中方锥的一片。同样，外锥之片也是四个鳖臑。原文不误。李潢不懂此处'半'字的含义，认为'中'字衍，'中方锥'系'方锥'之误。白尚恕照葫芦画瓢，亦认为'外锥之半'不通，删去'之半'二字，均改变了刘徽原意。"

汉字多为多义字，在一字的许多意义中，固然有些相互和谐的意义，但也有意义相悖的解释；"半"字，一般释作"二分之一"，有时亦作"片"字解释。训诂古文时，应该根据其上、下文句的意义进行诠释，切不可自以为是地进行解释。在《九章算术》中，使用"半"字的地方，有数百处之多，无有一处释"半"为"片"者；在汉语中，只能说"一片冰"、"一半冰"，而不能说"冰之片"、"冰之半"；因为在这里，"片"或"半"是物品的单位名称，犹如通常所说"一把椅子"、"一张桌子"的"把"、"张"一样，其中"把"、"张"也是物品的单位名称，但不能说"椅子之把"、"桌子之张"，这是汉语最基本的常识。在这里，刘徽原意根本不是"方锥之片"、"外锥之片"的意思，因而不当错误地解释为"四个鳖臑全都是中方锥的一片"、"外锥之片也是四个鳖臑"；这种解释似为不妥。

综上所述，刘徽在前人基础上，严密论述了三种基本几何体堑堵、阳马、鳖臑的体积算法，然后对直线型立体进行有限次分割，使之分割成上述三种基本几何体，由三种基本几何体的体积算法，推导直线型立体的体积算法；从而证明了直线型立体体积

算法的正确性。这既是刘徽对“刘徽原理”的应用，也体现了刘徽所创造的“有限分割”法。“刘徽原理”、“有限分割”法以及“出入相补”原理在立体方面的应用，给《九章算术》直线型立体体积算法在理论上打下了坚实的基础。

第四节　刘徽的立体“截割原理”

刘徽建立了推证直线型立体体积算法的一套理论之后，对于推证圆型立体的体积算法，也提出一套推证的理论及其方法。我们称这一理论为“截割原理”。刘徽虽然没有具体论述其内容，但可以从下面的一些例证看出刘徽确实具有这种认识和思想。例如商功章第 9 问为：（如图 3・2・32）

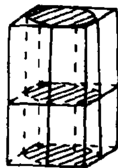


图 3・2・32

（9）今有圆堡柱，周四丈八尺，高一丈一尺。问：积几何？

答曰：二千一百一十二尺。

术曰：周自相乘，以高乘之，十二而一。

在术文之下，刘徽注称：

“于徽术，当以周自乘，以高乘之，又以二十五乘之，三百一十四而一。此之圆幂，亦如圆田之幂也。求幂亦如圆田，而以高乘幂也。”

又如第 11 问为：（如图 3・2・33）

（11）今有圆亭，下周三丈，上周二丈，高一丈。问：积几何？

答曰：五百二十七尺九分尺之七。

术曰：上、下周相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三十六而一。

术文之下，刘徽注称：

“此术周三径一之义，合以三除上、下周各为上、下径，以相乘，又各自乘，并以高乘之，三而一，为方亭之积。假令三约上、

下周俱不尽，还通之，即各为上、下径。令上、下径相乘，又各自乘，并以高乘之，为三方亭之积分。此合分母三相乘得九为法除之，又三而一，得方亭之积。从方亭求圆亭之积，亦犹方幂中求圆幂。乃令圆率三乘之，方率四而一，得圆亭之积。前求方亭之积，乃以三而一，今求圆亭之积，亦合三乘之，二母既同，故相准折。惟以方率四乘分母九，得三十六，而连除之。……”

再如第13问为：（如图3·2·34）

（13）今有圆锥，下周三丈五尺，高五丈一尺。问：积几何？

答曰：一千七百三十五尺一十二分尺之五。

术曰：下周自乘，以高乘之，三十六而一。

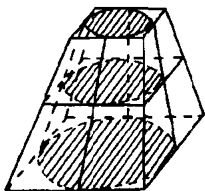


图 3·2·33

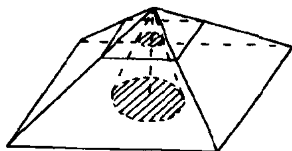


图 3·2·34

术文之下，刘徽注称：

“按此术，圆锥下周以为方锥下方。方锥下方令自乘，以高乘之，合三而一得大方锥之积。大方锥之积合十二圆锥矣。今求一圆锥，复合十二除之，故令三乘十二得三十六而连除。于徽术，当下周自乘，以高乘之，又以二十五乘之，九百四十二而一。圆锥比于方锥，亦二百分之一百五十七。令径自乘者，亦当以一百五十七乘之，六百而一。其说如圆亭也。”

通过以上所论，不难发现，刘徽对圆形立体体积算法的推导采用了“截割原理”理论。所谓“截割原理”，是指在圆形立体之外，作一外切方形立体，再作此立体的任意横截面，若横截面呈一圆及其外切正方形的图形，则刘徽断言，圆形立体的体积与其外切方形立体体积之比，等于其截面圆面积与其外切正方形面积

之比；也可等于其圆周长与其外切正方形周长之比；即等于 π 与 4 之比。即

圆型立体体积：外切方型立体体积＝圆周长：外切正方形周长
＝圆面积：外切正方形面积＝π：4。

如果能计算直线形立体的体积，利用这一原理，则不难推算圆型立体的体积算法。如刘徽在圆堡柱注文中所说：“此之圆幂，亦如圆田之幂也。求幂亦如圆田，而以高乘幂也”。又如圆亭注称：“从方亭求圆亭之积，亦犹方幂中求圆幂。乃令圆率三（π）乘之，方率四而一，得圆亭之积”。再如圆锥注称：“圆锥比于方锥，亦二百分之一百五十七”。在方田章宛田术下，也有类似注文，即“若令其（方锥）中容圆锥，圆锥见幂与方锥见幂，其率犹圆幂之与方幂也。”

通过以上所述，显而易见，刘徽提出并使用了上述“截割原理”，但是，刘徽是如何提出这一原理，由于注文过于简略，无法了解其确切的具体推导过程，不过可以从一些其他注文里，略窥其端倪。

在方田章圆田术刘徽注称：“令径自乘为方幂四百寸，与圆幂（314 寸）相折，圆幂得一百五十七为率，方幂得二百为率。方幂二百，其中容圆幂一百五十七也。圆率犹为微少”。由这一记载可以断定，刘徽深知正方形与其内切圆面积之比等于四百与三百一十四之比；或等于二百与一百五十七之比。也即

正方形面积：内切圆面积＝4：π。

又由圆田术刘徽注“又令径二尺与周六尺二寸八分相约，周得一百五十七，径得五十，则其相与之率也。周率犹为微少也”。以及少广章开立圆术刘徽注“假令方二尺，方四面并得八尺也，谓之方周。其中令圆径与方等，亦二尺也。圆半径以乘圆周之半，即圆幂也。半方以乘方周之半，即方幂也。然则方周者方幂之率也；圆周者圆幂之率也。”可知刘徽很清楚正方形面积与其内切圆面积

之比，等于正方形周长与其内切圆周长之比，也等于二百与一百五十七之比。即

$$正方形面积：内切圆面积=正方形周长：内切圆周长$$
$$=4:\pi。$$

再由商功章羡除术刘徽注“按阳马之棋，两邪棋底方，当其方也，不问旁角而割之，相半可知也。推此上连无成不方，故方锥与阳马同实。”可以断定刘徽知道两立体若每层横断面面积相等，则两立体的体积必然相等。刘徽虽然以阳马、方锥为例证说明这一命题，但是叙述中并不失其一般性；也就是说，刘徽的论述是具有一般性的。在这里，可以看到刘徽有“积面成体”的思想。既然有“积面成体”的思想，难免有人在其他论述中产生某些误解，例如，宛田术刘徽注有“若令其（方锥）中容圆锥，圆锥见幂与方锥见幂，其率犹圆幂之与方幂也”一语；刘徽所说，乃是方锥与其内切圆锥侧面积之比，等于两者底面面积之比或两者底面周长之比，也即等于方锥底面与其内切圆锥底面面积之比或者底面周长之比。有人则依据“叠线成面”的思想，认为是：方锥侧面积与其内切圆锥侧面积之比，等于方锥与其内切圆锥的截面面积之比；或认为等于方锥与其内切圆锥截面周长之比。虽然这一论断本身是正确无误的，但由“其率犹圆幂之与方幂与”可知，刘徽所论只涉及方锥与其内切圆锥底面面积之比；有时或可强行理解为方锥与其内切圆锥底面周长之比。可是，宛田里，刘徽并未论及方锥与其内切圆锥截面面积或周长的问题。在这注文之后，刘徽又说：“按方锥下方六尺，则方周二十四尺，以五尺乘而半之，则亦方锥之见幂。故求圆锥之数，折径以乘下周之半，即圆锥之幂也”。其中“方周”或“方周二十四尺”是指方锥底面周长，而“下周”是指内切圆锥底面周长。由于内切圆锥的“折径”与方锥的“正面邪”“五尺”等长，所以可理解刘徽注所说是指方锥与其内切圆锥底面周长之比。但不能理解为截面周长之比。

通过以上所述可知，刘徽虽有“积面成体”的思想，但仅就字面而论，在宛田里似乎不能把刘徽的思想任意加以扩充，不应认为刘徽所指是截面面积或截面周长之比。但是有人以为：“作为方锥之内切圆锥，则任何水平截面所截方锥与圆锥之截口，皆为正方形与内切圆；方锥面是由外切正方形叠积而成，而圆锥面由内切圆周叠积而成，故方锥（侧）面积与圆锥（侧）面积之比即是方周与圆周之比率，……在这里运用了叠线成面与‘截口原理’，刘徽注中虽未详说，但他置圆锥内切于方锥其意向是显然的”。这段论述显然是没有根据的，既然已经承认“刘徽注中虽未详说”，然而又说“他置圆锥内切于方锥其意向是显然的”，更没有说刘徽有这种意向的依据。这一论述，不止是没有根据、想当然的臆测，而且是把今人之见冠诸刘徽头上之说；这一论述，是值得进一步商榷的。

第五节　刘徽的“牟合方盖”学说

所谓“牟合方盖”，用现今术语来说，就是两个相同正圆柱垂直相交的公共部分。刘徽何以采用这一名称，一般有三种说法：其一，认为古代称伞为“盖”，“方盖”即是方形的伞，“牟”与侔通，“牟”即是相同或全同的意思，“合”是合于一起的意思；“牟合方盖”，就是两个相同的方伞合于一起的意思。其二，认为“牟”与蛑通，是指蝈蝈一类的昆虫，“合”与盒通，即是盒子，“方盖”是指方形的盖子；“牟合方盖”，是指在北方的民间，以高粱皮子编织的用以装蝈蝈一类昆虫的方盖盒子。其三，认为刘徽采用“牟合方盖”这一形体，是有其历史的根源的，可能受到春秋、战国时代的“钫”或马王堆出土的“食品盒”一类物品启发，而提出这一形体的。这三种说法，虽各有根源，但对刘徽的学说影响不大，因而暂不深入探究。

少广章第23、24两问，是已知球积推求球径的问题，即

(23) 今有积四千五百尺。问：为立圆径几何？

答曰：二十尺。

(24)又有积一万六千四百四十八亿六千六百四十三万七千五百尺。问：为立圆径几何？

答曰：一万四千三百尺。

开立圆术曰：置积尺数，以十六乘之，九而一，所得开立方除之，即丸径。

刘徽认为这一算法不正确，认为是球积算法不正确所致，因而推导球积的正确算法。刘徽注说：

“为术者，盖依周三径一之率。令圆幂居方幂四分之三，圆囷居立方亦四分之三。更令圆囷为方率十二，丸为圆率九，丸居圆囷又四分之三也。置四分自乘得十六分，三自乘得九，故丸居立方十六分之九也。故以十六乘积，九而一，得立方之积。丸径与立方等，故开立方而除，得径也。然此意非也。何以验之？取立方棋八枚，皆令立方一寸，积之为立方二寸。规之为圆囷，径二寸，高二寸。又复横规之，则其形有似牟合方盖矣。八棋皆似阳马，圆然也。按合盖者，方率也。丸居其中，即圆率也。推此言之，谓夫圆囷为方率，岂不阙哉？”

刘徽认为，古人以$\pi=3$立算，因正方形与其内切圆面积之比为$4:3$ (π)，而正方体与其内切圆柱体积之比也为$4:3$ (π)。若令等边圆柱为方率，其内切球为圆率，设等边圆柱与其内切球体积之比为$12:9=4:3$ (π)。则得

$$V_{立方}:V_{柱}=4:\pi=4:3,$$

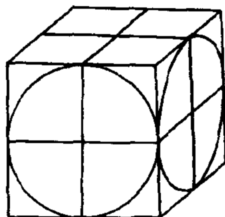
$$V_{柱}:V_{球}=4:\pi=4:3,$$

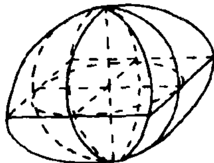
故有 $$V_{球}:V_{立方}=(3\times3):(4\times4)=9:16;$$

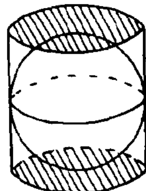
由于正方体棱长等于其内切球直径，所以古人推得

$$V_{立方}=16/9\times V_{球}=d^3。$$

刘徽认为这一算法不正确。他取棱长 1 寸的正方体模型八枚，使集于一起，成棱长 2 寸的正方体。由一侧面作内切圆柱面，又由另一侧面也作内切圆柱面，两圆柱面共同包括的部分称为“牟合方盖”。在“牟合方盖”里作其内切球，再任意作与底平行的截面，而“牟合方盖”与其内切球的截面图形则是正方形与其内切圆；据此，“牟合方盖”与其内切球的体积之比为 4∶3 (π)。既然“牟合方盖”与其内切球的体积之比为 4∶3 (π) 是正确无误的，而“圆囷”与其内切球体积之比也为 4∶3 (π)，则显然是错误的。刘徽依据“牟合方盖”与其内切球的体积之比，从而评论古人所立“开立圆术”之不确。（如图 3・2・35、图 3・2・36、图 3・2・37）


图 3・2・35


图 3・2・36


图 3・2・37

在这段注文中，刘徽一面评论古人推求球积算法之不确，一面利用“截割原理”创立“牟合方盖”与其内切球体积之比为 4∶π 这一学说；从而为有关球积理论奠定了坚实的基础。刘徽所创之学说，即

$$V_{合盖} : V_{球} = 4 : \pi。$$

在此基础上，刘徽继续说：

“以周三径一为圆率，则圆幂伤少。令圆囷为方率，则丸积伤多。互相通补，是以九与十六之率偶与实相近，而丸犹伤多耳。”

刘徽是说，若取 $\pi=3$，d 为直径，所求得的圆面积则较大，即

$$圆面积=\pi/4\times d^2>3/4\times d^2。$$

因　$V_{切球}=\pi/4\times V_{合盖}$，

若以“圆囷”为方率，而“圆囷”大于“合盖”体积，故知，以此推算出内切球积则较小，即　$V_{切球}<\pi/4\times V_{圆囷}$。

因　$V_{切球}:V_{合盖}=\pi:4$，　$V_{圆囷}:V_{立方}=\pi:4$，

故　$V_{圆囷}/V_{合盖}\times V_{切球}=\pi^2/16\times V_{立方}$。

若取 $\pi=3$，虽然 $9/16\times d^3$ 与 $\pi^2/16\times d^3$ 相近，也就是

$$9/16 与 \pi^2/16$$

之率相近。但是，

$$V_{圆囷}>V_{合盖},$$

乃得　$V_{球}<9/16\times d^3$.

刘徽分析了其中大、小关系之后，拟进一步推求其算法，由于遇到了困难，未能求得球体积算法。因而刘徽注继续说：

“观立方之内，合盖之外，虽衰杀有渐，而多少不掩。判合总结，方圆相缠，浓纤诡互，不可等正。欲陋形措意，惧失正理。敢不阙疑，以俟能言者。”

在这段注文之后，一面分析实验数据之不确实，一面批驳张衡算法之不精密。如刘徽注称：“衡说之自然，欲协其阴阳奇偶之说，而不顾疏密矣。虽有文词，斯乱道破义，病也。”

在这段注文之后，《九章算术》记载了唐代天算家李淳风的注文，李注引述了南北朝天算家祖冲之之子祖暅之对球积的算法推导。祖暅之给予彻底解决。

第三章 刘徽对勾股理论的论述

在中国古代几何学里，所涉及的范畴，一般分为三方面：即是平面图形的面积计算；立体图形的体积或容积的计算；线段的长度计算。在《九章算术·方田》中，主要论证了各种平面图形的面积算法，刘徽利用“出入相补”原理给予严密而正确的证明；在《九章算术·商功》中，主要包括了各种立体图形的体积或容积的算法，刘徽则利用“出入相补”原理、“刘徽原理”、“有限分割法”以及“截割原理”，论证了各种不同类型立体图形体积或容积算法的正确性。至于直线线段长短的计算，则包括在《九章算术·勾股》的各问中；刘徽注解《九章算术》时，则以“勾股定理”为基础，对各种直线段的算法，给以证明并适当予以推广，从而为中国古代几何学奠定了理论基础。虽然中国古代几何学未及研究各元素之间的位置及性质关系，但是，中国古代几何学是以形、数结合为特点，以计算、算法为特色的几何学，从而形成了以中国几何学为代表的东方几何学之独特体系。

在这里，将《九章算术·勾股》所载有关直线段的论述和刘徽的贡献胪列如下。

第一节 刘徽对“勾股定理”的论证

在勾股章第1、2、3问及勾股术中，记载了勾股定理和算法，即

(1) 今有勾三尺，股四尺，问：为弦几何？

答曰：五尺。

(2) 今有弦五尺，勾三尺，问：为股几何？

答曰：四尺。

(3) 今有股四尺，弦五尺，问：为勾几何？

答曰：三尺。

勾股术曰：勾股各自乘，并而开方除之，即弦。

又：股自乘，以减弦自乘，其余开方除之，即勾。

又：勾自乘，以减弦自乘，其余开方除之，即股。

在勾股术文之下，刘徽注称：

“勾自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也。合成弦方之幂，开方除之，即弦也。”(如图 3·3·1)[①] “勾、股幂合以成弦幂。令去其一，则余在者皆可得而知之。”

《九章算术》所载“勾股定理”，共有三种不同互求形式，表示以现代形式，即

$$\sqrt{勾^2+股^2}=弦,$$

$$\sqrt{弦^2-股^2}=勾,$$

$$\sqrt{弦^2-勾^2}=股。$$

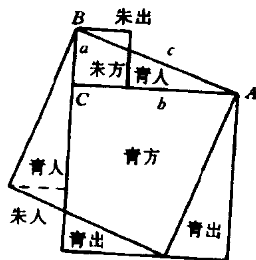


图 3·3·1

在古代，“勾股定理”的表现形式是具有根式的算法，虽然与勾^2+股^2=弦^2 等价，但是，其表现形式是不同的。因此，不当混为一谈。如图 3·3·1 所示，设勾股形为 ABC，又设以勾 a 为边的正方形为朱方 (a^2)，以股 b 为边的正方形为青方 (b^2)。刘徽利用“出入相补”原理，将“朱出”部分按类补入“朱入”处；将“青出”部分补入“青入”处，各就“朱方”、“青方”不移动之处，使之合拼成弦方 (c^2)。开方除之，即得弦长 (c)。

① 李潢.《九章算术细草图说》

刘徽注解《九章算术》时，原本附有图形，现今传本只有注文而无附图；历代研讨《九章算术》者，虽都有补图，而清代几乎形成补图热潮，仅就刘徽推证"勾股定理"之图形而论，据不完全统计，至清代所补"勾股定理"图形约有88种之多。其中以李潢、李锐及日人远藤利贞所补之图最接近于刘徽原意。上图（图3·3·1）即是依据李潢所补之图绘制而成。但是有人以为此图未必符合刘徽原意，于是乃"创立新图"①，如图3·3·2所示，除在"弦方"之四周各增加一勾股形外，而实质上与清人项名达②或陈杰所补之图几乎完全雷同；也是在勾股形之外各作一"朱方"、"青方"，然后使拼结成"弦方"；这种拼结方法用以推证"勾股定理"都是正确无误的，但在勾股形外各作一"朱方"、"青方"的作法，则未必符合刘徽的原意。因为这种"在勾股形外各作一'朱方'、'青方'"的较为复杂的作图法，恐怕超越了刘徽的时代。而李潢的作图法，则是依据勾股形的勾、股边，分别作"朱方"、"青方"的，这种作法，大多数人认为是比较接近于刘徽时代的，所以多数学者采用李潢的作图法，用以证明"勾股定理"。

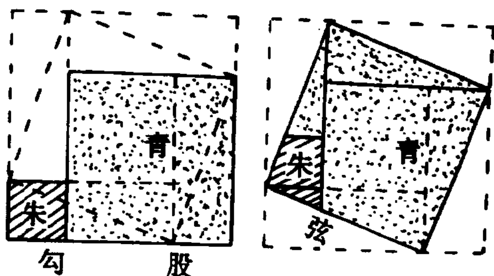


图3·3·2

在勾股术"勾股"二字之下，刘徽注称：

"短面曰勾，长面曰股，相与结角曰弦。勾短其股，股短其弦。将以施于诸率，故先具此术以见其源也。"

① 李继闵.《九章算术》及其刘徽注研究. 西安：陕西人民教育出版社，1990

② 项名达.《勾股六术》第一术

刘徽先给予“勾”、“股”、“弦”之定义，再论及其大、小关系，然后可实施于各种算法；因而强调勾股之术是勾股章各术之源，于是置诸本章之首。

在前一又术之后，李淳风注称：

“此术以勾、股幂合成弦幂。勾方于内，则勾短于股。令股自乘以减弦自乘，余者即勾幂也。故开方除之，即勾也。”

其中“勾方于内，则勾短于股”一语，于意欠通，故疑是衍文。若删去这九字，则前后文词更为连贯。

在勾股术及两又术之后，刘徽注称：

“勾、股幂合以成弦幂。令去其一，则余在者皆可得而知之。”

大意是说，既然“朱方”、“青方”可合成“弦方”，在“弦方”中减去“朱方”或“青方”，其剩余部分则为“青方”或“朱方”，开平方即分别得股或勾。在这里，刘徽并未以图形论证，而是以数理推证的。以上就是刘徽把“勾股定理”看作是本章的理论基础，以及对“勾股定理”的证明。

第二节　刘徽对“方幂”、“矩幂”的论证及应用

在“勾股定理”的基础上，《九章算术》及刘徽注都转入推求与勾股有关的线段之长的问题，并提出“方幂”、“矩幂”概念及其算法。如勾股章第5问为：

(5) 今有木长二丈，围之三尺。葛生其下，缠木七周，上与木齐问：葛长几何？

答曰：二丈九尺。

术曰：以七周乘三尺为股，木长为勾，为之求弦。弦者，葛之长。

在术文之下，刘徽注称：

“据围广、木长求葛之长，其形葛卷裹袤。以笔管青线宛转有似葛之缠木，解而观之，则每周之间，自有相间成勾股弦。则其间木长为股，围之为勾，葛长为弦。七周乘三尺是并合众勾以为一勾，则勾长而股短。故术以木长谓之勾，围之谓之股，言之倒互。勾与股求弦，亦如前图。勾三自乘为朱幂，股四自乘为青幂，合朱、青得二十五，为弦五自乘幂，出上第一图。勾、股幂合为弦幂，明矣。然二幂之数谓倒在于弦幂之中，而更可相表里。居里者成方幂，其居表者则成矩幂。二幂表、里形诡而数均。又按此图，勾幂之矩，朱卷居表，是其幂以股弦差为广，股弦并为袤，而股幂方其里。股幂之矩，青卷居表，是其幂以勾弦差为广，勾弦并为袤，而勾幂方其里。是故差之与并用除之，短、长相乘也。”其中“勾、股幂合为弦幂”至注终大意为：

既然勾幂、股幂可合成弦幂，则可作等积变形，使勾幂、股幂倒置于弦幂方形之中，一为方形之幂，一为“矩”形之幂，两幂正好合成弦幂方形。如图3・3・3所示，其方形可称为“居里”，而“矩”形可称为“居表”；不论勾幂居里为方形，还是居表为“矩”形，其形状虽异，其面积却相等；股幂也是一样，不论股幂居里为方形，还是居表为“矩”形，其形状虽异，其面积却相等。又按此图而论，若勾幂居表为“矩”形，股幂居里为方形，则“勾幂之矩”可变为等积之长方形，其广为股弦差，其袤为股弦和，其面积为股弦差与股弦和之乘积（如图3・3・4）。即

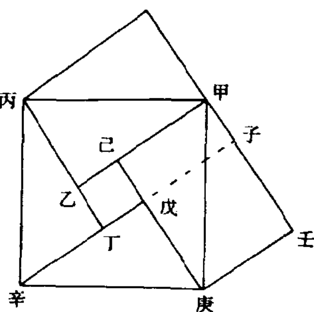


图3・3・3　项名达图

$$(c-b)(c+b)=a^2。$$

若股幂居表为“矩”形，勾幂居里为方形，则“股幂之矩”可变为等积之长方形，其广为勾弦差，其袤为勾弦和，其面积为勾弦

差与勾弦和之乘积（如图3·3·5）。即

$$(c-a)(c+a)=b^2,$$

在上式中，若推求差（股弦差或勾弦差）或推求和（股弦和或勾弦和），当用除法计算；若推求勾幂或推求股幂，当用短（股弦差或勾弦差）与长（股弦和或勾弦和）相乘计算。即

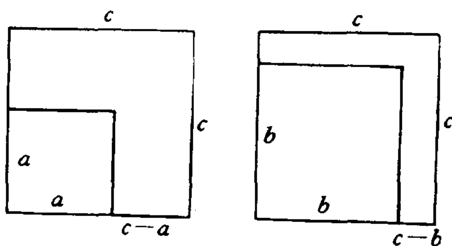


图 3·3·4

$$(c-b)=a^2/(c+b),$$
$$(c-a)=b^2/(c+a),$$
$$(c+b)=a^2/(c-b),$$
$$(c+a)=b^2/(c-a),$$
$$a^2=(c-b)(c+b),$$
$$b^2=(c-a)(c+a)。$$

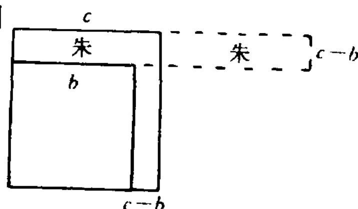


图 3·3·5

此注之末，各版本皆为："是故差之与并用除之，短长互相乘也。"在《九章算术》及刘徽注中，凡是两数相乘，即称为"相乘"或"乘"；凡是四、六、八数交错相乘，即称为"互相乘"或"互乘"；其中"相乘"，是指两数相乘，而"互乘"，则是指四、六、八数交错相乘；两术语"相乘"、"互乘"的意义迥别，决不能混为一谈。此处刘徽注"短长相乘也"一语中，"长"字下衍一"互"字，应当以意校删①。

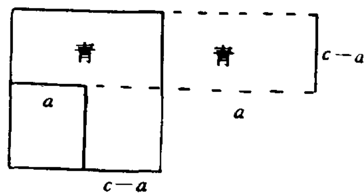


图 3·3·6

① 白尚恕.《九章算术》注释. 北京：科学出版社，1983

注文“据围广”至“葛长为弦”一段大意为：此问是根据“围广”、“木长”推求“葛长”的问题；刘徽以例证说明此问的构造，此问有似笔管缠青丝，每解一周，成一小勾股形；而每周之间，都成一小勾股形；解毕，则合成一大勾股形（如图3·3·7）。可见，此问即是以木长为勾（AC），围之为股（BC），以推求葛长为弦（AB）之长。

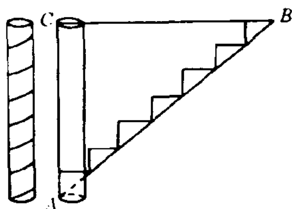


图 3·3·7

刘徽文此一比喻，不但非常形象，而且十分恰当；还表示了“以直代曲”、“化曲为直”的思想；就是把柱面螺旋线的“葛之缠木”这一空间曲线拉成直线。刘徽这种“以曲代直”或“化曲为直”的思想是非常珍贵的，不仅用初等数学方法解决了高等数学的问题，还沟通了“直线”与“曲线”之间的关系。例如，他使用极限观念，在“割圆术”、“孤田术”里具体体现了“以直代曲”、“化曲为直”的思想，他还在“环田术”、“曲池术”以及“葛之缠木术”里，直接使用了这一思想。刘徽把这种思想贯穿在《九章算术》之中，是一件难能可贵的事例。

注文“七周乘三尺”至“出上第一图”一段大意为：如图3·3·7所示，葛缠木七周，一围三尺，七周乘三尺，则得$BC=21$尺，又知木长为$AC=20$尺，按“勾股定理”可得

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=29\text{ 尺。}$$

即是依据勾与股而求其弦。

根据“第一图”所示，勾三自乘得九，作为朱幂；股四自乘得一十六，作为青幂；拼合朱幂、青幂，即九加十六得二十五，就是弦五自乘之幂。

注文“则其间”至“第一图”一段，《永乐大典》本为“则其间葛青七弦周乘三围并合众勾以为一勾木长而股短术云木长谓之股言之倒勾五与股求弦亦无围二十五青弦之自乘幂出上第一围”。

戴震认为“讹舛不可通”，钱宝琮依戴震校改为：“则其间木长为股，围之为勾，葛长为弦。七周乘三围，是并合众勾以为一勾，则勾长而股短。故术以木长谓之勾，围之谓之股，言之倒互。勾与股求弦，亦如前图。勾三自乘为朱幂，股四自乘为青幂，合朱、青，二十五，为弦五自乘幂，出上第一图”。白尚恕以为，注文“七周乘三围”，于意欠通；依据术文校改为“七周乘三尺”[①] 又依据殿本按语，在注文“合朱、青”与“二十五”之间，较补一“得”字[②]。

白尚恕并对注文“七周乘三尺是并合众勾以为一勾，则勾长而股短。故术以木长谓之勾，围之谓之股，言之倒互”一段，进行了讨论。认为：根据注文可得“木长为股”，即木长 20 尺作为股；“围之为勾”，即围之 21 尺作为勾；以推求“葛长为弦”，即葛长 29 尺作为弦。又据刘徽前面所说“短面曰勾，长面曰股”来分析。此处注文所说“则勾长而股短”，是正确的。但是，注文接着说：“故术以木长谓之勾，围之谓之股，言之倒互”。殊不知是戴震所校勘的文字未必符合刘徽原意？还是在刘徽注《九章算术》之前，术文误置勾、股，言之倒互？阅读至此，读者不无疑窦。由于历史资料所限，很难稽考何者所校为正确。因而以为，如果将这段注文改为：“则其间葛长为弦，七周乘三尺为股，并合众勾以为一勾是为木长。故术云木长谓之勾，围之谓之股，为之求弦。勾三股四求弦五。合朱、青二十五，为弦自乘幂，出上第一图。”或较为妥当[③]。

关于“方幂”、“矩幂”的论说，又见勾股章第 6、7、8、9、10、11、12、13 诸问为，

（6）今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适与岸齐。问：水深、葭长各几何？

---

① 白尚恕.《九章算术》注释. 北京：科学出版社，1983，311

②③ 白尚恕.《九章算术》注释. 北京：科学出版社，1983，310

答曰：水深一丈二尺；葭长一丈三尺。

术曰：半池方自乘，以出水一尺自乘，减之，余，倍出水除之，即得水深。加出水数，得葭长。

在术文之下，刘徽注称：

“此以池方半之，得五尺为勾，水深为股，葭长为弦。以勾及股弦差求股、弦。故令勾自乘，先见矩幂也。出水者，股弦差。减此差于矩幂则余之。倍差为此幂之广，水深是股。令此幂除倍出水二尺为广，故得水深也。”

(7) 今有立木，系索其末，委地三尺。引索却行，去本八尺而索尽。问：索长几何？

答曰：一丈二尺六分尺之一。

术曰：以去本自乘，令如委数而一，所得，加委地数而半之，即索长。

在术文之下，刘徽注称：

“此以去本八尺为勾，所求索者弦也。引而索尽与‘开门去阃’者，勾及股弦差求股同一术。去本自乘者，先张矩幂”。“委地者，股弦差也。以除矩幂，即是股弦并也。”“子不可半者，倍其母。加差于并则成两索长，故又半之。其减差于并而半之，得木长也。”

(8) 今有垣高一丈。倚木于垣，上与垣齐。引木却行一尺，其木至地。问：木几何？

答曰：五丈五寸。

术曰：以垣高十尺自乘，如却行尺数而一，所得，以加却行尺数而半之，即木长数。

在术文之下，刘徽注称：

“此以垣高一丈为勾，所求倚木者为弦，引却行一尺为股弦差。其为术之意，与‘系索’问同也。”

(9) 今有圆材，埋在壁中，不知大小。以锯锯之，深一寸，锯

道长一尺。问：径几何？

答曰：材径二尺六寸。

术曰：半锯道自乘，如深寸而一，以深寸增之，即材径。

在术文之下，刘徽注称：

“此术以锯道一尺为勾，材径为弦，锯深一寸为股弦差之一半，故锯长亦半之也。”“亦以半增之。如上术去本当半之，今此皆同半，差不复半也。”

(10) 今有开门去阃一尺，不合二寸。问：门广几何？

答曰：一丈一寸。

术曰：以去阃一尺自乘，所得，以不合二寸半之而一，所得，增不合之半，即得门广。

在术文之下，刘徽注称：

“此去阃一尺为勾，半门广为弦，不合二寸，以半之得一寸为股弦差，求弦。故当半之。今即以两弦为广数，故不复半之也。”

(11) 今有户高多于广六尺八寸，两隅相去适一丈。问：户高、广各几何？

答曰：广二尺八寸；高九尺六寸。

术曰：令一丈自乘为实，半相多，令自乘，倍之，减实，半其余。以开方除之，所得，减相多之半，即户广。加相多之半，即户高。

在术文之下，刘徽注称：

“令户广为勾，高为股，两隅相去一丈为弦，高多于广六尺八寸为勾股差。按图为位，弦幂适满万寸。倍之，减勾股差幂。开方除之，其所得即高广并数。以差减并而半之即户广，加相多之数即户高也。今此术先求其半。一丈自乘为朱幂四，黄幂一。半差自乘，又倍之，为黄幂四分之二。减实，半其余，有朱幂二，黄幂四分之一。其余大方得四分之一。故开方除之，得高广并数之半。减半差得广，加得户高。又按此图幂，勾股并自乘，加差幂，

为两弦幂。半之，开方得弦。今倍弦幂减差幂，求勾股并，盖先见其弦，然后知其勾与股也。……，其勾股合而自乘之幂，令弦自乘倍之为两弦幂以减之。其余，开方除之，为勾股差。加差于合而半之为股，减差于合而半之为勾。勾、股、弦即高、广、邪。其出此图也，其倍弦为广袤合，勾自乘为幂，得广即股弦差。其矩勾之幂，倍股为从法，开之亦股弦差。以勾股差幂减弦幂，半其余，差为从法，开方除之，即勾也。"

(12) 今有户不知高、广，竿不知长、短。横之不出四尺，纵之不出二尺，邪之适出。问：户高、广、邪各几何?

答曰：广六尺；高八尺；邪一丈。

术曰：纵、横不出相乘，倍而开方除之。所得，加纵不出即户广，加横不出即户高，两不出加之，即户邪。

在术文之下，刘徽注称：

"此以户广为勾，户高为股，户邪为弦。凡勾股幂之在弦幂，或矩于表，或方于里。连之者举表矩而连之。又从勾方里令为青矩之表，未满黄方。满此方则两矩之端重于隅中，各以股弦差为广，勾弦差为袤。故两差相乘，又倍之，则成黄方之幕。开方除之，得黄方之面。其外之青矩亦以股弦差为广，故以股弦差加之，则为勾也。"

(13) 今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺。问：折者高几何?

答曰：四尺二十分尺之十一。

术曰：以去本自乘，令如高而一，所得，以减竹高而半其余，即折者之高也。

在术文之下，刘徽注称：

"此去本三尺为勾，折之余高为股，末折抵地为弦。以勾及股弦并求股，故先令勾自乘见矩幂。""竹高一丈为股弦并，以除此幂得差。""此术与'系索'者之类，更相反覆也。亦可如上术，令高自乘为股弦并幂，去本自乘为矩幂，减之，余为实，倍高为法，

则得折之高数也。”

根据第 6 问术文，设池方为 $2a$，水深为 b，葭长为 c（如图 3·3·8），则得：

水深：$b=[a^2-(c-b)^2]/[2(c-b)]=12$，

葭长：$c=[a^2-(c-b)^2]/[2(c-b)]+(c-b)=13$。

刘徽在注文中解释说：此问是已知勾、股弦差推求股、弦的问题，所以先取勾的平方，以求得“勾幂之矩”，而“出水一尺”即是股弦差，由“勾幂之矩”减去股弦差的平方，则得

$$a^2-(c-b)^2=2(c-b)b。$$

上式即是倍股弦差乘以股长的面积，若除以股弦差之二倍，即得其股，也即是水深（如图 3·3·9 及图 3·3·10）。很明显，股与股弦差相加之和即是葭长。这就是刘徽利用“勾幂之矩”推求水深及葭长的算法。

根据第 7 问术文，设勾、股、弦分别为 a、b、c，“委地三

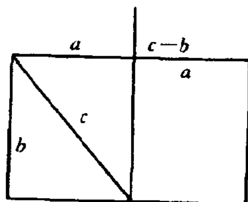


图 3·3·8

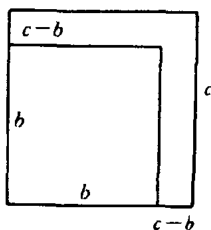


图 3·3·9

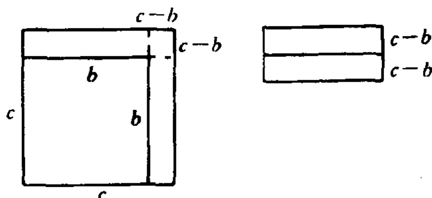


图 3·3·10

尺”为股弦差 $c-b=3$，“去本八尺”为勾 $a=8$，按术可得索长（c）、木长（b）各为：

$$c=[a^2/(c-b)+(c-b)]\div 2=12+1/6,$$

$$b=[a^2/(c-b)-(c-b)]\div 2=9+1/6。$$

其中勾自乘 a^2，即是“勾幂之矩”，即 $a^2=(c-b)(c+b)$，由于“委地三尺”是股弦差；“勾幂之矩”除以股弦差即是股弦和，股弦差与股弦和相加和之半，即是弦；而其差之半即是股。也即刘徽注“加差于并则成两索长，故又半之。其减差于并而半之，得木长也。”

根据第 8 问术文，设“垣高一丈”为勾 $a=10$，“却行一尺”为股弦差 $c-b=1$. 仿第 7 问算法，乃得木长（c）为：

$$c=[a^2/(c-b)+(c-b)]\div 2=5\text{ 丈 }5\text{ 寸。}$$

这一算法，正如刘徽注所说“为术之意，与‘系索’同也。”

根据第 9 问术文，设“锯道一尺”为勾 $AB=a$，则“锯深一寸”乃为股弦差之半 $CD=(c-b)/2$，所求“材径”即是弦 $BE=c$（如图 3・3・11）。仿上术可得：

$$c=(a/2)^2/[(c-b)/2]+[(c-b)/2]=26\text{ 寸。}$$

根据第 10 问术文，设“去阃一尺”为勾 $DE=a$，则“不合二寸”之半为股弦差 $CD=c-b$，所求“门广”为倍弦 $AB=2c$（如图 3・3・12）。仿上术可得“门广”为：

$$AB=2c=a^2/(c-b)+(c-b)=101\text{ 寸。}$$

根据第 11 问术文，设“户广”为勾 a，“户高”为股 b，“两隅相去”为弦 $c=100$ 寸，则“户高多于广”为勾股差，即 $(b-a)=$ 6 尺 8 寸。按术得：

$$a=\sqrt{\{c^2-2[(b-a)/2]^2\}\div 2}-(b-a)\div 2=28,$$

$$b=\sqrt{\{c^2-2[(b-a)/2]^2\}\div 2}+(b-a)\div 2=96。$$

刘徽给予图示：取弦幂的二倍 $2c^2$，减去勾股差幂 $(b-a)^2$，开

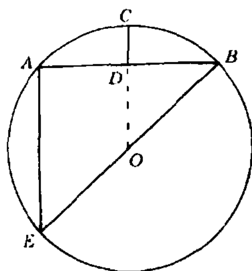


图 3・3・11

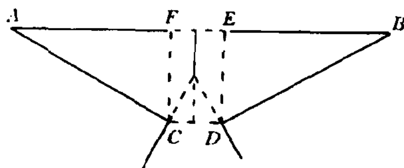


图 3・3・12

平方即得勾股和，即“高广并数”。再取勾股和与勾股差相加之和的一半、或相减之差的一半，即可求得勾与股分别为：

$$a=[\sqrt{2c^2-(b-a)^2}-(b-a)]\div 2,$$

$$b=[\sqrt{2c^2-(b-a)^2}+(b-a)]\div 2。$$

刘徽所论的算法，虽与术文算法不尽全同，但其实质是一致的。刘徽并以图形给以术文算法及自己算法的证明（如图 3・3・13）。

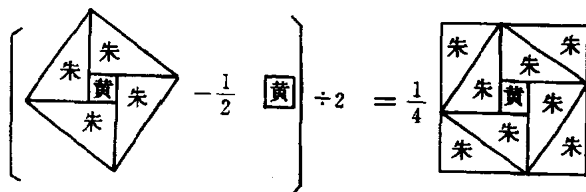


图 3・3・13

取弦方面积 c^2，其中包括“朱幂四”、“黄幂一”。又取“半差”自乘的二倍，即是“黄幂四分之二”。由弦方面积减去“黄幂四分之二”，再取其一半，即得朱幂二、黄幂四分之一，也即“大方”的四分之一。开平方，则得勾股和之半；此数减勾股差之半即得“户广”，此数加勾股差之半即得“户高”。这就是刘徽按图形推证术文的算法。刘徽仍然用此图形推证他的算法（如图 3・3・14）：取勾股和的平方、勾股差的平方，相加之和，即是弦

方面积的二倍；其一半的平方根即是弦。即：

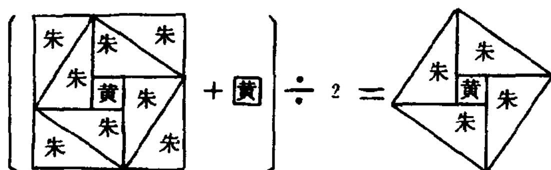


图 3・3・14

$$\sqrt{[(a+b)^2+(b-a)^2]\div 2}=\sqrt{2c^2/2}=c。$$

若已知弦长，则可由弦幂的二倍减去勾股差幂，开平方则得勾股和；勾股和与勾股差，其相减之半即是勾，其相加之半即是股。

在论证本问术文算法及刘徽算法之后，刘徽提出由勾股和及弦推求勾、股的方法：根据前说，既然勾股和幂与勾股差幂之和为弦幂的二倍，则由弦幂的二倍减去勾股和幂，开平方则得勾股差，勾股差与勾股和，其相减之半即是勾，其相加之半即是股。即：

$$[(a+b)-\sqrt{2c^2-(a+b)^2}]\div 2=a,$$

$$[(a+b)+\sqrt{2c^2-(a+b)^2}]\div 2=b。$$

在此之后，刘徽又利用"勾幂之矩"，也可由 $a^2=(c-b)(c+b)$ 导出股弦差，即 $a^2/(c+b)=c-b$。

刘徽还利用二次方程推求股弦差，以"勾幂之矩" a^2 作为常数项，以倍股 $2b$ 作为一次项系数，以 1 作为二次项系数，乃得：

$$x^2+2bx=a^2。$$

解之即得 $x=c-b$，这就是说，若已知勾、股，可求得股弦差（如图 3・3・15）。

对于本问来说，也可利用二次方程求得其解；以"勾股差幂减弦幂"之半，即 $[c^2-(b-a)^2]\div 2=ab$ 作为常数项，以勾股差 $(b-a)$ 作为一次项系数，以 1 作为二次项系数（如图 3・3・16）；即得

$$x^2+(b-a)x=[c^2-(b-a^2)]/2,$$

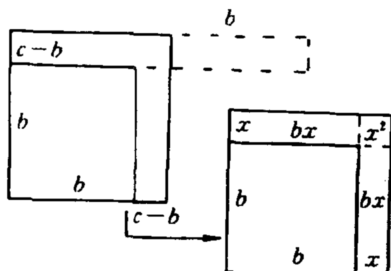


图 3・3・15

或　　$x^2+(b-a)x=ab$。

解之即得 $x=a$，也即是"户广"。

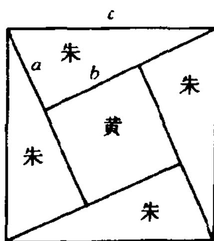


图 3・3・16

根据第 12 问术文，设"户广"为勾 a，"户高"为股 b，"户邪"为弦 c，由题意，"横不出"为 $c-a=4$ 尺，"从不出"为 $c-b=2$ 尺，"邪之适出"为 c；因得：

$$\sqrt{2(c-b)(c-a)}+(c-b)=a=6 \text{ 尺},$$

$$\sqrt{2(c-b)(c-a)}+(c-a)=b=8 \text{ 尺},$$

$$\sqrt{2(c-b)(c-a)}+(c-b)+(c-a)=c=10 \text{ 尺}。$$

刘徽利用图形（如图 3・3・17）给予证明，在弦方之内，既作一"勾幂之矩"又作一"股幂之矩"；在勾方幂之内的"矩"形勾幂，刘徽注称为"青矩之表"，在勾方幂之内减去"青矩之表"，刘徽注称所余为"黄方"；"黄方"也就是勾方幂与股方幂的重合部分。其面积相当于"矩"形勾幂与"矩"形股幂的两重合部分；即 $2(c-b)(c-a)$。而"黄方"面积又为 $(a+b-c)^2$。故得：

$$\sqrt{2(c-b)(c-a)}=(a+b-c),$$

即是"黄方之面"。以所得"加从不出即户广"，"加横不出即户高"，"两不出加之，得户邪"。

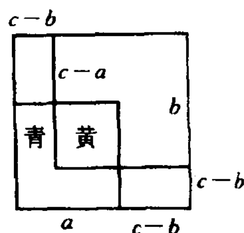


图 3・3・17

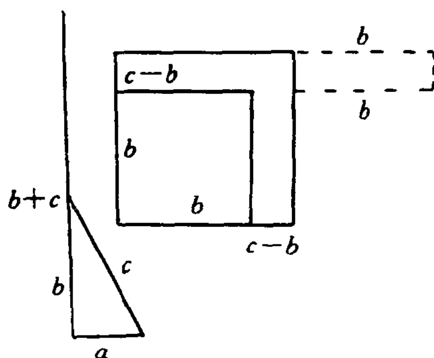


图 3・3・18

根据第13问术文，设“去本”为勾a，“余高”为股b，“末折抵地”为弦c；由题意，“去本”为勾$a=3$尺，“竹高”为股弦并$c+b=10$尺，推求其股即“余高”为：

$$b=1/2[(c+b)-a^2/(c+b)]。$$

刘徽利用图形（如图3・3・18）给以证明，因“勾幂之矩”为$a^2=(c-b)(c+b)$，故有股弦差为$a^2/(c+b)=(c-b)$，又根据股弦和与股弦差相减差之一半为股，乃得“折者之高”。在此基础上，刘徽又提出另一算法：

$$b=[(c+b)^2-a^2]\div 2(c+b)。$$

如图3・3・19所示，由“股弦并幂”减去“去本自乘矩幂”，其余为二倍股幂与二倍股弦乘积之和，即

$$(c+b)^2-a^2=2b^2+2bc,$$

此式除以二倍股弦并数，即得“折者之高”。

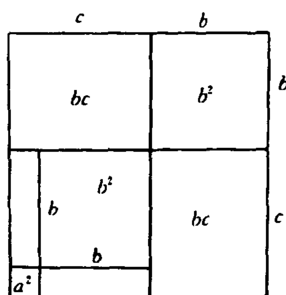


图 3・3・19

以上所绘之图，基本上采用清人戴震的补图，虽然刘徽的原图早已亡佚，但

戴震所补之图是符合刘徽原意的。最近有人将戴图重新改绘（图

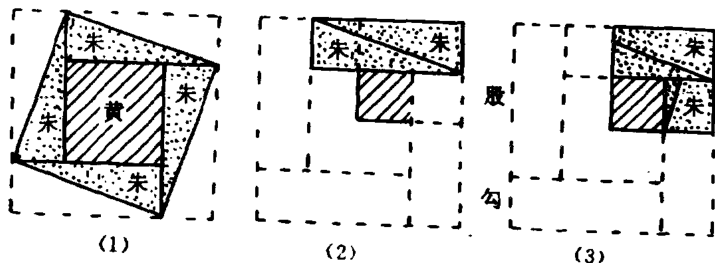


图 3·3·20

3·3·20），其用意似是使之更符合于刘徽之说，例如在第11问刘徽注称："一丈自乘为朱幂四，黄幂一。……，半其余，有朱幂二，黄幂四分之一。其于大方得四分之一"。刘徽既称"一丈自乘为朱幂四，黄幂一"，取其余之半，乃得"朱幂二，黄幂四分之一"，不过又因"大方"有朱幂八，黄幂一，"半其余"，很显然就是"大方"的四分之一；刘徽未必绘有运算过程之图，可是，所绘"求高广并数之半图"，以表示其运算过程[①]，是值得商榷的。

关于校勘，应该慎重从事。例如第11问术文之下，刘徽注"又按此图幂"至"开方即得勾股"一文，《永乐大典》本为："又按此图幂，勾股相并而加其差幂，亦减弦幂，为积，盖先见其弦，然后知其勾与股。今适等自乘，亦各为方，先见其弦，然而后知其勾与股，适等者，令自乘，亦令为弦幂，令半相多而自乘，倍之，亦为弦幂，而差数复先此各自乘之，而与相乘数，各为门实"。其文字舛讹不可通，今依戴震校改（如前面所引）。

在勾股形的 a、b、c、$(a+b)$、$(a+c)$、$(b+c)$、$(b-a)$、$(c-a)$、$(c-b)$ 九事中，任知其中二事，即可求得其他七事；这种

① 李继闵.《九章算术》及其刘徽注研究. 西安：陕西人民教育出版社，1990，365

问题按说共有 $C_9^2=36$ 种，除去只用加、减即可求得者外，再除去 a、b 可以互换者外，实际仅有 8 种不同问题。即（1）已知 a、b，求 c；（2）已知 a、$(c+b)$，求 b、c；（3）已知 a、$(c-b)$，求 b、c；（4）已知 c、$(a+b)$，求 a、b；（5）已知 c、$(b-a)$，求 a、b；（6）已知 $(c-a)$、$(c-b)$，求 a、b、c；（7）已知 $(c+a)$、$(c-b)$，求 a、b、c；（8）已知 $(c+a)$、$(c+b)$，求 a、b、c。在勾股章中，从第 1 至第 13 问刘徽注里，分别论述了前 6 种问题的解法，虽然第 7、8 两种问题是由项名达、朱世杰分别给予解答者外，其前 6 种问题则由刘徽、赵爽各自给出了专用算法公式。这种功绩是应予以表彰的。

第三节　刘徽对“勾股两容”的论述和证明

在勾股章第 15、16 两问中，《九章算术》分别论述了“勾股容方”、“勾股容圆”问题，刘徽在其注文中，既用“出入相补原理”给予证明，又用“相似勾股形性质”给以证明。其第 15 问为：

（15）今有勾五步，股十二步。问：勾中容方几何？

答曰：方三步十七分步之九。

术曰：并勾、股为法，勾股相乘为实，使如法而一，得方一步。

在术文之下，刘徽注称：

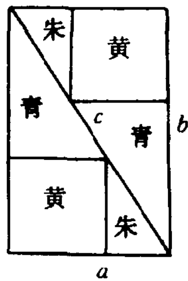


图 3·3·21

“勾股相乘为朱、青、黄幂各二。令黄幂连于下隅，朱、青各以类合，共成修幂。中方黄为广，并勾股为袤。故并勾股为法。幂图方在勾中，则方面之两廉各自成小勾股，而相与之势不失本率也。股面之小勾股，并为股。令股为中方率，并勾股为率，据见勾五步而今有之，得中方也。复令勾为中方率，以并勾股为率，据股十二步而今有之，则中方又可知。此

则虽不效，而法、实有生矣。下容圆术，以今有衰分言之，可以见之也。”

根据经文及术文，设“勾五步”为 $a=5$，“股十二步”为 $b=12$，“勾中容方”之边为 x。按术得：

$$x=ab/(a+b)=(3+9/17)(步)。$$

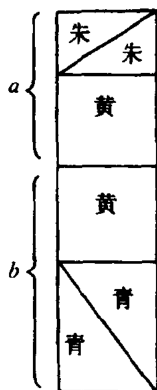


图 3・3・22

刘徽先以图形论证这一算法，如图 3・3・21 所示，以勾 a、股 b 为边作长方形，分割为两勾股形。其中“勾中容方”为黄幂，两旁各一小勾股形分别为朱幂、青幂。显见此长方形面积为“朱、青、黄幂各二”；再将此形变为等积的长方形，其广为“勾中容方”之边（x），其长为“并勾股”（$a+b$）（如图 3・3・22），因面积为 ab，故得上式。

刘徽再以相似勾股形性质论证上述公式：因为“黄方”容于勾中，“黄方”之两旁各一小勾股形，这两勾股形与原勾股形都是相似形；而且股边小勾股形之小勾（x）、小股（$b-x$）之和等于原勾股形之股（b）；勾边小勾股形之小勾（$a-x$）、小股（x）之和等于原勾股形之勾（a）（如图 3・3・23）。

根据相似形性质，每一勾股形之两边分别与他一勾股形两对应边之比相等、或其合分比相等，都等于原勾股形对应边之比。刘徽称这一性质为“其相与之势不失本率也；”或今称为“不失本率”原理。因而乃得：

因　$(b-x)+x=b$，

故　$(a+b):[(b-x)+x]=a:x$，

或　$(a+b):b=a:x$，

得　$x=ab/(a+b)=3+9/17$。

仿此乃有：$(a+b):[(a-x)+x]=b:x$，

即　$(a+b):a=b:x$，

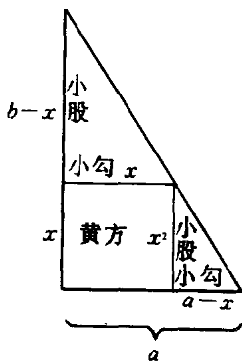


图 3・3・23

得　　$x=ab/(a+b)=3+9/17$。

勾股章第16问为：

(16) 今有勾八步，股十五步。问：勾中容圆径几何？

答曰：六步。

术曰：八步为勾，十五步为股，为之求弦。三位并之为法，以勾乘股，倍之为实。实如法得径一步。

术文之下，刘徽注称：

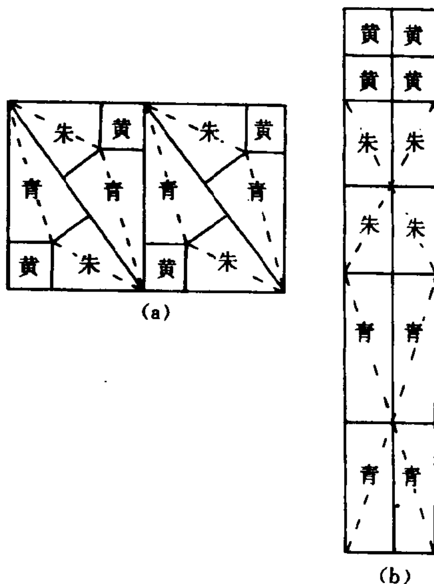


图 3·3·24

“勾股相乘为图之本体，朱、青、黄幂各二，倍之则为各四。可用画于小纸，分裁邪正之会，令颠倒相补，各以类合，成修幂。圆径为广，并勾、股、弦为袤。故并勾、股、弦以为法。又以图之大体言之，股中青必合立规于横、广、勾、股又邪三径均，而复连规纵横量度勾股，必合而成小方矣。又画中弦以观其会，则勾、股之面中央各有小勾股弦。勾面之小股、股面之小勾皆小方

之面、皆圆径之半。其数故可衰。以勾、股、弦为列衰，副并为法。以勾乘未并者为实。实如法而一，则勾面之小股可知也。以股乘未并者为实，则股面之小勾可知。言虽异矣，及所以成法实则同归矣。又可以股弦差减勾为圆径。勾弦差减股为圆径。又弦减勾股并，余为圆径。以勾弦差乘股弦差而倍之，开方除之，亦圆径也"。

根据经文及术文，设勾、股、弦分别为$a=8$、$b=15$、c，"勾中容圆"的直径为d，按术则得

$$d=2ab/(a+b+c)。$$

其中弦c可由"勾股定理"导出，即$c=\sqrt{a^2+b^2}=17$。

刘徽一面以图形论证、一面以配分比例论证上式，然后又给以勾股形内切圆直径的四种求法。如图3·3·25所示，过勾股形内切圆心，向三边作垂线，分割勾股形为三部分，分别称为朱、青、黄幂。取两个以勾(a)、股(b)为边的长方形，其面积为$2ab$；再使用"出入相补"原理，将此两长方形变为等积的另一长方形，其宽为内切圆直径(d)，长为勾股形三边之和($a+b+c$)，因其面积为$2ab$，故有　$d\times(a+b+c)=2ab$，

得　$d=2ab/(a+b+c)=6$。

就整个图形而论，刘徽把勾股形分割为朱、青、黄三部分，而"股中青"必位于与三边等距离之处。再过内切圆心，向勾、股作垂线，则与勾、股边可组成小正方形，并称之为"黄方"。刘徽过内切圆圆心作与弦平行之线段，称为"中弦"，即是作平行弦。由"黄方"之边、平行弦及勾、股边中央各组成小勾股形，而勾边小勾股形之小股、股边小勾股形之小勾，既是小正方形即"黄方"的边，又是内切圆之半径。由于勾边小勾股形、股边小勾股形与原勾股形都是相似勾股形，所以刘徽便以衰分术证明这一算法（如图3·3·25及图3·3·26）。即以勾、股、弦为列衰：

$$a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2=a:b:c=8:15:17。$$

以其和为法：　　$a+b+c=8+15+17=40$，

以勾乘未并者为实：　　$(a_2+b_2+c_2)\times b=a\times b=8\times 15=120$，

得"勾面之小股"即圆半径为　　$r=a\times b/(a+b+c)=3$。

仿此可得"股面之小勾"，也即内切圆半径为

$$r=(a_1+b_1+c_1)\times a/(a+b+c)=b\times a/(a+b+c)=3。$$

刘徽以为，上述方法虽然不尽相同，但其原理却是一致的。然后刘徽又提出推求内切圆直径的四种方法；即

(1)　$d=a-(c-b)$，(股弦差减勾为圆径)

(2)　$d=b-(c-a)$，(勾弦差减股为圆径)

(3)　$d=(a+b)-c$，(弦减勾股并余为圆径)

(4)　$d=\sqrt{2(c-a)(c-b)}$。

(勾弦差乘股弦差而倍之，开方除之，亦圆径也)

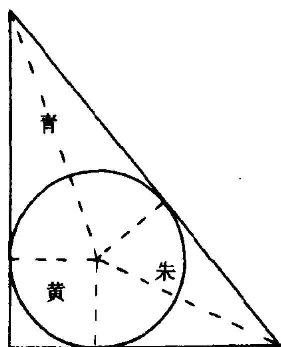


图 3·3·25

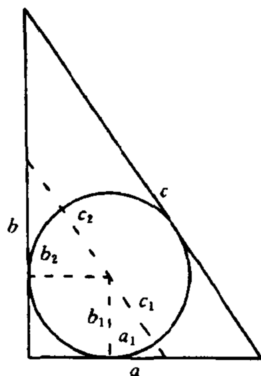


图 3·3·26

刘徽如何导出这四种方法，注文不详，猜测如下：(1) 因勾边等于股弦差与直径之和，即 $a=(c-b)+d$，故得 $d=a-(c-b)$；(2) 因股边等于勾弦差与直径之和，即 $b=(c-a)+d$，故得 $d=b-(c-a)$；(3) 因勾股边的和等于弦与直径的和，即 $a+b=c+d$，故得 $d=(a+b)-c$；(4) 根据第 12 问 $2(c-a)(c-b)=(a+b-$

$c)^2$，故得 $d=\sqrt{2(c-a)(c-b)}$。也有人以为其中“前三个公式显然是关系

$$勾+股=弦+径$$

的直接推论，而这一关系从刘徽分割勾股形为朱青黄幂的图中明显看出。由勾股基本公式：勾$=\sqrt{2\text{（勾弦差）（股弦差）}}+$股弦差，知

$$勾-股弦差=\sqrt{2\times勾弦差\times股弦差},$$

与上面的第一式比较，便得最后的容圆公式。在刘徽看来它们都是显然的推论，故略而不证了”[①] 还有人以为，“刘徽还说圆径 d 等于 $a+b-c$，他大概知道恒等式 $(a+b-c)(a+b+c)=2ab$ 是成立的”[②]。不拘对刘徽注文如何猜测，因为没有文献可查，所以不便作出任何评论。

对于刘徽注“勾股相乘为图之本体，朱、青、黄幂各二，倍之则为各四。可用画于小纸分裁邪正之会，……”；有人以为“因为图版仅一面着色，拼合时不能翻面，故刘徽用‘勾股相乘为图之本体’来合成朱、青、黄方各二，……有的数学史论著不明此理，以为可以由勾股形中的朱、青、黄幂各二，不用‘倍之’就可拼合成方，而简单地求出容圆公式。其实，在单面着色图版不能翻转的情况下这是办不到的。足见刘徽注文是据实记述的”[③]。这种评论有正确的一面，也有其悖理之处。有的论著简单地只用“朱、青、黄幂各二”，就可拼合成方，从而求得容圆公式。这种论著确实“不明‘此’理”，但“此”理未必是“图版仅一面着色，

① 李继闵.《九章算术》及其刘徽注研究，西安：陕西人民教育出版社，1990，399－400

② 钱宝琮. 中国数学史话. 北京：中国青年出版社，1957，75

③ 李继闵.《九章算术》及其刘徽注研究. 西安：陕西人民教育出版社，1990，397

拼合时不能翻面"。即使是图版仅一面着色，不用翻面也可拼合成推求圆半径的方形。而实际应是：仅用"朱、青、黄幂各二"，只能拼合成一边为圆半径，一边为勾、股、弦三数和之半的长方形；而不能拼合成一边为圆直径，一边为勾、股、弦三数和的长方形。必须"倍之"，必须"倍之则为各四"，即使朱、青、黄幂各四，才能拼合成一边为圆直径，一边为勾、股、弦三数和的长方形，从而方便地求出符合术文要求的容圆公式。我们以为，这才是有些论著所不明的"此"理，并非是"图版不能翻面"的此理，而应该是拼合成术文所要求的长方形就是了。

在第 15 问术文下，刘徽注称："勾股相乘为朱、青、黄幂各二。令黄幂连于下隅，朱、青各以类合，共成修幂。……"其实，刘徽也可以不取"勾股相乘为朱、青、黄幂各二"，而取勾股乘积之半，即朱、青、黄幂各一，即可按"出入相补"原理，便可变原勾股形为等积（$ab/2$）的长方形，其长为勾股相加和之半（（$a+b$）/2），其宽为"勾股容方"之边，即"黄方"之边（x）（如图 3・3・27）。这样，也可证得计算公式。即：

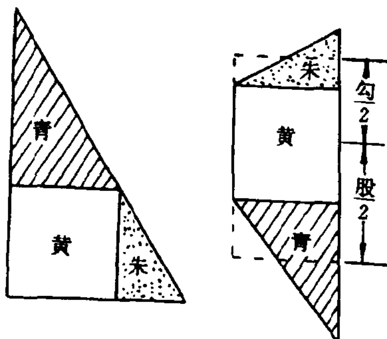


图 3・3・27

$$x=(ab/2)\div[(a+b)/2]=ab/(a+b)。$$

由于这一图形不符合术文的要求，所以刘徽可能采用"勾股相乘为朱、青、黄幂各二。……"的说法。若此论不谬，这一说法，也可作为第 16 问刘徽注何以采用"倍之则为各四"说法的一个旁证。

与刘徽差不多同时的赵爽，在为《周髀・日高图》作注时，曾说："黄甲与黄乙其实正等。……，青丙与青己其实亦等。黄甲与

青丙相连，黄乙与青己相连，其实亦等”（如图 3・3・28）。

赵爽所说，意即

□黄甲＝□黄乙，

………，

□青丙＝□青己，

□黄甲＋□青丙

＝□黄乙＋□青己。

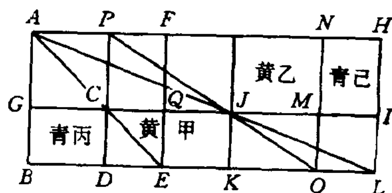


图 3・3・28

赵爽是利用长方形面积证明“日高”、“日远”算法的。自刘徽注《九章算术》“勾中容方”以后，引起后人关注，到宋代，杨辉在《续古摘奇算法》中，曾推广“勾中容方”，并说：“辉尝置《海岛》小图于座右，乃见先贤作法之万一”。（如图 3・3・29）。又说：“直田之长名股，其阔名勾，于两隅角斜界一线，其名弦；弦之内、外分二勾股；其一勾中容横，其一股中容直，二积之数皆同”。还说：“凡股中容横，勾中容直，二积皆同”。意即：

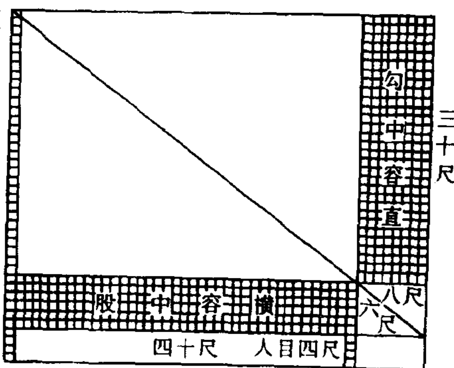


图 3・3・29

勾中容横＝股中容直，

或　　股中容横＝勾中容直，

也可表示为　　横长×横宽＝直长×直宽，

或　　横长：直长＝直宽：横宽。

其前者是“乘积”形式，表示两者面积相等；后者是“比率”形式，表示两者是相似勾股形性质。这两种说法，在理论上是一致的，只是出发点不同而已。在我国古代，有人喜用“勾中容横”原

理，有人则善于使用相似形性质。

自刘徽注《九章算术》“勾中容圆”以后，研究容圆问题的学者较多，最突出的要算是李冶。金、元时代李冶在其《测圆海镜》里，引入得自“洞渊九容”之说，这九容即：(1) 勾上容圆；(2) 股上容圆；(3) 弦上容圆；(4) 勾股上容圆；(5) 勾外容圆；(6) 股外容圆；(7) 弦外容圆；(8) 勾外容圆半；(9) 股外容圆半。这九个容圆公式都是正确无误的。

第四节　刘徽对相似勾股形性质和测望问题的论述

《九章算术》勾股章第17、18、19、20、22、23、24等7问，悉为测望问题。刘徽对这些问题所撰写的注文，都是利用相似勾股形性质论述的。今举数例如次：

(17) 今有邑方二百步，各中开门。出东门十五步有木。问：出南门几何步而见木？

答曰：六百六十六步太半步。

术曰：出东门步数为法，半邑方自乘为实，实如法得一步。

在术文之下，刘徽注称：

“以勾率为法也。”“此以出东门十五步为勾率，东门南至隅一百步为股率，南门东至隅一百步为见勾步。欲以见勾求股，以为出南门数。正合半邑方自乘者，股率当乘见勾，此二者数同也。”

(19) 今有邑方不知大小，各中开门。出北门三十步有木，出西门七百五十步见木。问：邑方几何？

答曰：一里。

术曰：令两处门步数相乘，因而四之，为实。开方除之，即得邑方。

在术文之下，刘徽注称：

“按前术：半邑方自乘，出东门步数除之，即出南门步数。今两出门相乘为半邑方自乘，居一隅之积分。因而四之，即得四隅之积分。故以为实。开方除之，即邑方也。”

(20) 今有邑方不知大小，各中开门。出北门二十步有木。出南门十四步，折而西行一千七百七十五步见木。问：邑方几何？

答曰：二百五十步。

术曰：以出北门步数乘西行步数，倍之，为实。并出南门步数为从法，开方除之，即邑方。

在术文之下，刘徽注称：

“此以折而西行为股，自木至邑南十四步为勾。以出北门二十步为勾率，北门至西隅为股率，即半广数。故以出北门勾率乘西行股，得半广股率乘勾之幂。然此幂居西半。故又倍之合东半以尽之也。”“此术之幂，东西广如邑方，南北自木尽邑南十四步为袤。合南北步数为广袤差，故并两步数为从法。以为隅外之幂也。”

(22) 有木去人不知远近。立四表相去各一丈，令左两表与所望三相直。从后右表望之，入前右表三寸。问：木去人几何？

答曰：三十三丈三尺三寸少半寸。

术曰：令一丈自乘为实，以三寸为法，实如法而一。

在术文之下，刘徽注称：

“此以入前右表三寸为勾率，右两表相去一丈为股率，左、右两表相去一丈为见勾，所问木去人者见勾之股。股率当乘见勾，此二率俱一丈，故曰自乘。以三寸为法，实如法得一寸。”

根据第 17 问术文，设出东门步数为 $a=15$（如图 3·3·30），半邑方为 $b=a_1=100$，按术则得出南门步数 x 为：

$$x=a_1b/a=b^2/a=666+2/3\text{。（单位：步）}$$

刘徽利用相似勾股形性质进行推证：以 a 为“勾率”，以 b 为“股率”，a_1 为“见勾”，x 为与“见勾”对应之股。故得

$a : b = a_1 : x$。

根据第 19 问经文，设“出北门步数”为 a，“出西门步数”为 b，“邑方”为 x，按术得

$x = \sqrt{4a \times b} = 666 + 2/3$。(单位：步)

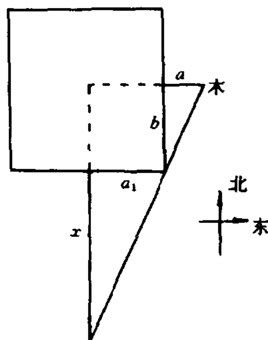


图 3·3·30

刘徽仿照第 17 问算法进行注释，按相似勾股形性质，得

出北门步数：半邑方＝半邑方：出西门步数，

即 $a : (x/2) = (x/2) : b$；

故得 $(x/2)^2 = ab$，

或 $x^2 = 4ab$。

根据第 20 问术文，设出南门“折而西行”为股 $b = 1775$，“木至邑南”为勾 $(a + x + a_1)$，“出北门步数”为勾率 a，“北门至西隅”为股率 $x/2$. 按术由相似勾股形性质得（如图 3·3·31）

$a : (x/2) = (a + x + a_1) : b$，

或 $ab = (x/2)(a + x + a_1)$。

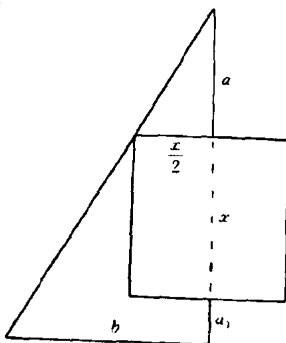


图 3·3·31

由“勾中容横”原理可知，上式乃是“邑西半幂”，取其二倍，即

$2ab = (a + x + a_1)x$，

乃是“邑西、邑东两半幂”之和，故得方程

$x^2 + (a + a_1)x = 2ab$，

$x^2 + 34x = 71000$。

根据第 22 问术文，设“入前右表”为勾率，“右两表相去”为股率，“左、右两表相去”为见勾，而“木去人”为见勾所对应之

见股（如图 3·3·32）。

刘徽利用相似勾股形性质，得

$CD : DE = BP : BC$，即

$BP = BC \times CD / DE$

$= CD^2 / DE = 3333 + 1/3$。（单位：寸）

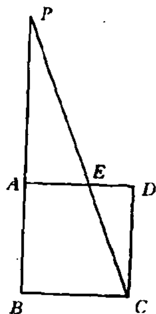


图 3·3·32

由以上例证可以看出，在勾股章测望问题里，刘徽都是用相似勾股形性质论证其算法的。在此基础上，刘徽受到启发，便结合古代重差术编撰了《重差》9 问，列于《九章算术》之末。唐代李淳风等人为国子监明算科选定数学教科书，便把《重差》与《九章算术》分离，另行单本。因其第 1 问为“今有望海岛……”，便把《重差》更名为《海岛算经》。从此，《海岛算经》即成为十部算经之一。

根据《隋书·经籍志》记载，知刘徽撰有《九章重差图》一卷，此书也早经失传。又根据《九章算术》刘徽序称：“辄造重差，并为注解”。可知刘徽曾为《重差》作注。可是，现传本《海岛算经》，除有李淳风注文外，而刘徽的《九章重差图》及其“注解”则早已亡佚。全书共列 9 问，其中“两次”测望者 3 问；“三次”测望者 4 问；“四次”测望者 2 问。所用测量方法共计 3 种基本方法，即“重表”法、“连索”法和“累矩”法。如《九章算术》刘徽序称：“凡望极高、测绝深而兼知其远者必用重差，勾股则必以重差为率，故曰重差也。”又说：“度高者重表，测深者累矩，孤离者三望，离而又旁求者四望。触类而长之，则虽幽遐诡伏，靡所不入。”刘徽在前人的基础上，除充实了二次测望方法外，从而创造了三次、四次测望法，在我国测量史上，写出了光辉的一页。

《海岛算经》第 1 问为：

“今有望海岛，立两表齐高三丈，前后相去千步，令后表与前

表三相直。从前表却行一百二十三步，人目著地取望岛峰，与表末三合。从后表却行一百二十七步，人目著地取望岛峰，亦与表末三合。问：岛高及去表各几何？

答曰：岛高四里五十五步。

去表一百二里一百五十步。

术曰：以表高乘表间为实。相多为法，除之。所得加表高，即得岛高。求前表去岛远近者，以前表却行乘表间为实。相多为法，除之，得岛去表里数。"

如图 3・3・33 所示，设海岛为 AH，岛峰为 A，前表为 BC，后表为 DE，表间为 BD，前表却行为 BF，后表却行为 DG，相多为（$DG-BF$），去表远近为 BH，按术得：

$$AH=BC\times BD/(DG-BF)+BC,$$

或

岛高＝表高×表间/（后表却行－前表却行）＋表高。

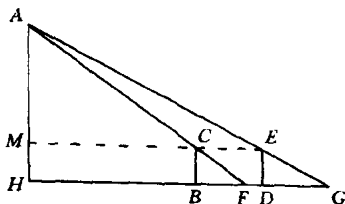


图 3・3・33

这就是测高重差公式。

按术得

$$BH=BF\times BD/(DG-BF),$$

或

去表远近＝前表却行×表间/（后表却行－前表却行）。

这就是测远重差公式。

刘徽很可能是利用相似勾股形性质推导上述公式的。因为《九章算术》只有勾股测望术，即一次测望术；至于重差术，即二次、三次、四次测望术，则缺而不论。刘徽有鉴于此，乃编撰《重差》9 问列于《九章算术》之后。刘徽说："按《九章算术》立四表望远及因木望山之术，皆端旁互见，无有超邈若斯之类。然

则苍等为术犹未足以博尽群数也。徽寻九数有‘重差’之名，原其旨趣乃所以施于此也 。……，勾股则必以重差为率，故曰重差也。”刘徽乃“辄造《重差》，并为注解，以究古人之意，缀于勾股之下”，“以阐世术之美”。

又因为“勾中容横”原理等价于相似勾股形性质，有人则以为《海岛算经》是依据“勾中容横”原理造术的。但是，在刘徽的论述中，很难寻找到强有力的论据。就以《海岛算经》第1问而论，我们以为是依据两对相似勾股形的性质，利用其对应边的合、分比推导出来的。如图3·3·33所示，因

$\triangle AME \backsim \triangle EDG$，　　$\triangle AMC \backsim \triangle CBF$，

于是有　$AM : ME = ED : DG$，　　$AM : MC = CB : BF$，

或　$AM \times DG = ED \times ME$，　　$AM \times BF = CB \times MC$，

相减得　$AM(DG - BF) = ED(ME - MC)$，

乃有　$AM = ED(ME - MC)/(DG - BF)$，

故得　$AH = BC \times BD/(DG - BF) + BC$。

这就是所推求的测高重差公式。

又由　$AM \times BF = CB \times MC$，

得　$MC = AM \times BF/CB = BF(ME - MC)/(DG - BF)$。

这就是所推求的测远重差公式。

至于《海岛算经》其他各问，可能也是由相似勾股形性质导出有关数据后，再套用上述重差公式。例如第6问：

今有东南望波口，立两表，南、北相去九丈，以索薄地连之。当北表之西却行去表六丈，入索北端四丈二寸。以望北岸，入前所望表里一丈二尺。又却后行去表十三丈五尺，薄地遥望波口南岸，与南表三合。问：波口广几何？

答曰：一里二百步。

术曰：以后去表乘入索，如表相去而一。所得，以前去表减之，余以为法。复以前去表减后去表，余以乘入所望表里为实。实

如法而一，得波口广。

根据经文，设两表相去为d，北表之西却行即前去表为b，入索北端为h，入前所望表里为k，又却后行去表即后去表为a，波口广为x（如图3·3·34）。

本问是一道三次测望问题，刘徽原意可能利用相似勾股形性质导出有关数据后，再套用重差公式推求波口之广。即是由相似勾股形性质得：

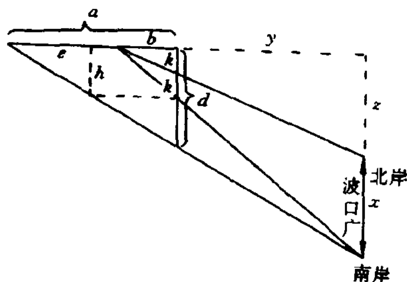


图 3·3·34

$$e/h=a/d,$$

$$z/(y+b)=(h-k)/b,$$

即：

$$e=ha/d,$$

$$z=(y+b)(h-k)/b,$$

其中h、$(a-e)$、b、$(e-b)$、y、$(z+x)$分别相当于重差公式的“表高”、“表间”、“前表却行”、“相多”、“岛去表”、“岛高”。根据这些数据套入重差公式，即得：

$$y=b(a-e)/(e-b)=ab(d-h)/(ha-db),$$

$$z+x=h(a-e)/(e-b)+h=hd(a-b)/(ha-db)。$$

又因

$$z=(y+b)(h-k)/b$$

$$=d(a-b)(h-k)/(ha-db),$$

故得波口广为：

$$x=hd(a-b)/(ha-db)。$$

又如第9问为：

今有登山临邑，邑在山南。偃矩山上，令勾高三尺五寸。令勾端与邑东南隅及东北隅三相直。从勾端遥望东北隅，入下股一丈二尺。又施横勾于入股之会，从立勾端望西北隅，入横勾五尺。望东南隅，入下股一丈八尺。又设重矩于上，令矩间相去四丈。更从立勾端望东南隅，如上股一丈七尺五寸。问：邑广、长各几何？

答曰：南北长一里一百步。

　　东西广一里三十三步少半步。

术曰：以勾高乘东南隅入下股，如上股而一。所得减勾高，余为法。以东北隅下股减东南隅下股，余以乘矩间为实。实如法而一，得邑南北长也。求邑广，以入横勾乘矩间为实。实如法而一，即得邑东西广。

根据经文，设勾高为a，望东北隅入下股为k，望西北隅入横勾为c，望东南隅入下股为h，矩间相去为d，望东南隅入上股为b，南北邑长为x，东西邑广为y（如图3·3·35）。

本问是一道四次测望问题，刘徽可能利用相似勾股形性质，求得有关数据后，再套用重差公式，推求邑长及邑广。也就是由相似勾股形性质得

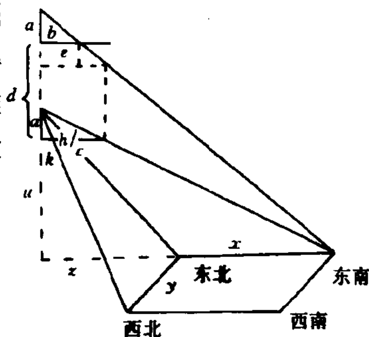


图 3·3·35

$$e:(h-b)=a:b,$$

$$z:(u+a)=k:a,$$

$$y:x=c:(h-k);$$

也即

$$e=a(h-b)/b,$$

$$a=k(u+a)/a,$$

$$y=cx/(h-k)。$$

其中 h、$(d-e)$、a、$(a+e)$、$[(a+e)-a]$、$(x+z)$、u，分别相当于重差公式里的“表高”、“表间”、“前表却行”、“后表却行”、“相多”、“岛高”、“岛去表”。将这些数据套入重差公式，即得

$$x+z=h(d-e)\div[(a+e)-a]+h=hd\div[ha/b-a];$$

$$u=a(d-e)\div[(a+e)-a]=bd/(h-b)-a;$$

$$z=k(u+a)/a=kd\div[ha/b-a];$$

套入重差公式，则得邑长、邑广各为

$$x=d(h-k)\div[ha/b-a];$$

$$y=cd\div[ha/b-a]。$$

自三国时代赵爽、刘徽之后，至隋、唐以及宋、元时期，研究测量问题者，颇不乏人，如李淳风、甄鸾、秦九韶、朱世杰、杨辉等人，他们虽然都沿用古法，但各自有所创新。李淳风推广平面测量为崎岖不平的坡地测量，甄鸾则改进为前、后测量法，秦九韶及朱世杰则增加了测量的条件，而杨辉论述了测量术之立法之源。所有这些贡献，在中国古代测量史上都是十分珍贵的资料。对于刘徽在测量方面的贡献，如杨辉于《续古摘奇算法》中评论说：“魏刘徽注《九章算术》，立重差著于勾股之下，以阐世术。夫度高、测深勾股之法，则无自而可知，故重表、累矩、三望、四望、旁求审察，是以松山高下、方邑大小其重表也。岸望谷深、山望津广其累矩也。登望松高、遥望波口非三望之术乎？清渊白石、登山临邑非四望之术乎？海岛去表为之篇首，因以名之，实《九章算术·勾股》之遗法也。”

在中国古代测量学的发展过程中，自三国时代起，刘徽等人，一面继承了《周髀算经》“用矩之道”、“测量日高、日远”的一、二次测望之术，一面发展成三次、四次测望术，使中国测量学达到了登峰造极的地步。在西欧，直到 16、17 世纪，才出现二次测望术的记载；到 18 世纪，才有了三、四次测望之术。可见，中国古代测量学的意境之深，功用之广。但是，明末徐光启在其《测

量异同》中说:"刘徽、沈存中(括)之流,皆尝言测望矣。能说一表,不能说重表也。"正如沈康身说"这完全是误解"[①]。

① 沈康身. 中算导论. 上海:上海教育出版社,1986,59

第四章 刘徽的几何理论特色

中国传统几何学虽然分为平面图形面积、立体图形体积、勾股图形的线段长短三方面进行计算，但是很少涉及其中各元素之间的性质研究。然而中国传统几何有其与西方几何不同的独特之处，今分别简述如下。

第一节 正确体会线段的位置关系

在中国传统几何中，并不是像西方数学那样，图形是图形，数值是数值，使图形与数值相分离；而是将图形、数值结合于一起，进行研究、处理的，如在《九章算术·方田》里，凡是涉及平面图形的问题，对于方田、圭田、邪田、箕田、圆田、宛田、弧田、环田等，都是推算其面积问题，在已知条件中，虽给予一些线段的长度，但对线段之间的位置关系却没有明确论证过，而《九章算术》及刘徽、李淳风注文中，也都是意在不言中，也就是没有明确论述各线段间的位置关系。如方田的“广”、“纵”未曾明确交待；圭田的“广”、“正纵”也未曾明确说明；又如邪田的“广”、“正纵”、“正广”，箕田的“舌广”、“踵广”、“正纵”，圆田的“周”、“径”，宛田的“下周”、“径”，弧田的“弦”、“矢”，环田的“径”、“中周”、“外周”，都没有给予明确的意义；好像只要用已知数据按“术”进行计算，求得其面积即可，其他如线段的位置关系，暂不考虑。在商功章，凡涉及立体图形的问题，如立方、城、垣、堤、沟、堑、渠、方堡柱、圆堡柱、方亭、圆亭、方锥、圆锥、堑堵、阳马、鳖臑、羡除、刍甍、刍童、曲池、盘池、

冥谷等，都是推求其体积或容积的问题，只需要按照已知数据依“术”进行计算，推求其体积或容积就行，至于已知的线段与底面之位置关系，《九章算术》及刘徽、李淳风注文皆未曾论及。在勾股章，基本上也是如此，虽然刘徽注说：“短面曰勾，长面曰股，相与结角曰弦。勾短其股，股短其弦”。但在其他部分则一字未提。如“勾股容圆”之“中弦”的位置关系、而其中“横”、“广”、“邪”与勾、股边的位置关系都未曾说明；又如“勾率”、“股率”与“见勾”、“见股”的位置关系也未交待。好像是只要按“术”计算，推求出答案即合于要求。

正因为没有明确论述线段之间的位置关系，所以对图形的理解难免有所差异；例如把“圭田”理解为直角三角形，或理解为一般三角形；把“邪田”理解为一般梯形，把“箕田”理解为磬折形；有人还把“邪田”理解成一般三角形；把“宛田”理解成扇形，或理解为优扇形，或理解为凸月形，也有人理解成抛物线旋转面；更把“里田”看成是一平行四边形。对于立体图形的理解，也存在一些差异，如把“方堡柱”理解为直四棱柱，把“鳖臑”看成是阳马之半。在勾股章里，由于刘徽注给予勾、股、弦的位置关系，所以迄今未曾产生差异。由于《九章算术》及刘徽、李淳风注文没有给予一些线段的位置关系，从表面看来虽是一层缺欠，但从另外角度分析，乃是中国传统几何的一大特色。

在《九章算术・方田》里，若能正确理解各种名词、术语的所述内容，则将不会在理解上出现差异，而且可以深入理解《九章算术》及刘徽、李淳风注文之原意。例如“圭田”术称：“半广以乘正纵”。其中所谓“半广”，即是“广”之一半，而“正纵”之“正”字，既有正直的意思，也有不偏不倚的意思，若解释以数学术语，当是垂直的纵线，也即所谓“垂线”；又由李籍《九章算术音义》“圭田者，其形上锐，有如圭然”，可以知道，“圭田”是一象形名称，当是由“圭”而得名；如《考工记》“玉人之事”所载

多种“圭”，其“圭”的形状都是对称形，而这里的“圭田”也应是对称形；再根据历代学人对“圭田”的理解，都认为“圭田”是等腰三角形；所以《九章算术》的“圭田”确实应是等腰三角形。既是等腰三角形，其面积的计算方法，自是底、高乘积之半，也即“半广以乘正纵”。但是，若面积算法为“半广以乘正纵”，或底、高乘积之半，而其形状则不止是等腰三角形，既可以是等腰三角形，也可以是斜三角形，还可以是正三角形；如果以这种逆推法，理解《九章算术》“圭田”的话，不只在理解上造成错觉，在方法上也未必可取。

《九章算术》“邪田”有两问，一问已知件为“一头广三十步，一头广四十二步，正纵六十四步”。另一问已知件为“正广六十五步，一畔纵一百步，一畔纵七十二步”。术文为：“并两邪而半之，以乘正纵若广。又可半正纵若广，以乘并，亩法而一”。其中术文“并两邪而半之”之“邪”字，使人费解。因术文前半句是指第一问而言，第一问已知件是两条“一头广”，并无两“邪”，此“邪”字可能是误文，由于论据不足，暂不校改。但依据已知件“一头广”、“正纵”或“一畔纵”、“正广”来分析，“邪田”当为直角梯形；而“两邪”当是指直角梯形的两底。如果把“邪田”理解为一般梯形，则对“箕田”及刘徽注的原意无法诠释。至于把“邪田”理解为一般三角形，更是不必多费笔墨了。

“箕田”是一象形名称，其形状当是等腰梯形。清代李潢不但把“邪田”误解为一般梯形，还把“箕田”误解为磬折形；近人也有从其说者。李籍《九章算术音义》称：“箕田者，有舌有踵，其形哆哆，有如箕然”。其中“箕”即是簸箕，“舌”即是箕口的伸展部分，“踵”即是箕底的收敛部分，而箕田两问中，所说“舌广”，是箕口的边长，“踵广”是箕底的边长，也即等腰梯形的两底边；而“正纵”是指箕田两底间的距离，也即等腰梯形的高。在箕田术文之下，刘徽注称：“中分箕田则为两邪田，故其术相似”。

若过等腰梯形两底中点作连线，可分等腰梯形为两直角梯形；所以其计算面积的算法相类似。但是，若过一般梯形两底作连线，未必能“中分”为两直角梯形，也未必能“中分”为两全同的一般梯形；若按刘徽注原意而论，“箕田”当为等腰梯形。如果理解“箕田”为磬折形，实无根据，因此怀疑李潢可能依据“中分箕田则为两邪田”一语，猜测“箕田”是一磬折形；而磬折形固然可以“中分”为两梯形，但能“中分”为两梯形者，未必一定是磬折形，也可能是“凹鼓形”、“凸鼓形”、“特殊五边形”（图3·4·1）等；因而何必一定以为“箕田”是磬折形？尤其依据刘徽注的这种逆推法，认为箕田是磬折形，是没有根据而不足取的。

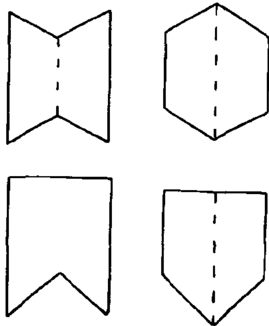


图 3·4·1

《九章算术》的“宛田”也是一象形名称，“宛”一般指宛丘或丘陵的形状，如《尔雅》称：“宛，谓中央隆高”。李籍《九章算术音义》称：“宛田者，中央隆高”。《夏侯阳算经》“丸田”注称：“形如覆半弹丸”。若用近代术语解释，“宛田”即是今之球冠形。《九章算术》所列“宛田”两问，只给予“下周”及“径”的数据，并未明确何为“下周”、何为“径”，而一般研习《九章算术》者，以为“下周”乃是在下之周，而“径”则如刘徽注所说“宛田上径圆穹”。但有人误以为“下周”是下余之周、“径”是直线或折线，便把“宛田”理解为扇形、优扇形，或理解为凸月形，或理解为抛物线弓形，甚至理解为馒头形；所以产生这些差异，其原因之一，是《九章算术》未明确“下周”、“径”的位置关系，原因之二，是理解有待继续深入。

至于把“里田”理解为平行四边形之说，更是没有根据。在立体图形方面，把“方堡柱”理解为直棱柱，显然不太确切，因

为“方堡柱”是正方棱柱，正棱柱自是直棱柱，而直棱柱则未必是正陵柱。刘徽在“阳马术”注称：“邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑，……，合两鳖臑成一阳马”。刘徽在“羡除术”注称：“中锥离而为四鳖臑焉”。“邪解半锥得此两大鳖臑”。由刘徽注可知，在必要时，鳖臑虽然可理解为“阳马之半”，但正规讨论鳖臑时，似应以“邪解堑堵……为鳖臑”为标准。否则易于造成混乱。

总上所述，由于《九章算术》未明确一些线段的位置关系，在理解上，使后世产生了一些差异。如果以“约定俗成”的精神去深入地体会其原意，这些差异是可以避免的。

第二节　刘徽在形数结合中，使几何问题代数化

如前所述，中国古代几何学是由三部分组成：平面图形的面积问题，立体图形的体积问题，勾股图形的线段长度问题。但是，这些问题原本属于纯几何问题，由于《九章算术》本身既提出平面图形的面积问题、立体图形的体积问题、勾股图形的线段问题，又给予各种平面图形、立体图形、勾股图形的已知元素之数据，同时要求“为田几何”、“为积几何”、“为弦（或其他线段）几何”，在“术”文中，并给予各种线段之间的运算关系，籍以表示其面积、体积、线段的算法。如圭田术称：“半广以乘正纵”。圆田术称：“半周半径相乘得积步”。城、垣、堤、沟、堑、渠术称：“并上下广而半之，以高若深乘之，又以袤乘之，即积尺”。方亭术称：“上下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一”。葭生中央术称：“半池方自乘，以出水一尺自乘，减之，余，倍出水除之，即得水深。加出水数，得葭长”。勾中容方术称：“并勾、股为法，勾股相乘为实，实如法而一，得方一步”。在这些问题中，如果以各问的已知数据代入术文，按术计算，则得各问的答数。表面上

这些问题是属于几何问题，但实际上都是计算问题；术文只给出如何进行计算，并没有说明何以如此计算，也就是说，没有说明其计算的原委。

刘徽及李淳风有鉴于此，先以约定俗成的方法明确面积、体积、长度的概念，再结合几何图形说明其所以如此计算的原委，也就是以几何图形论证其计算的正确性。

方田术下李淳风注称："一亩之田，广十五步，纵而疏之，令为十五行，即每行广一步而纵十六步。又横而截之，令为十六行，即每行广一步而纵十五步。此即纵疏横截之步，各自为方，凡有二百四十步。一亩之地步数正同。以此言之，即广纵相乘得积步，验矣"。大意是：把横为15步、纵为16步的一亩之田，按纵向分为15行，再按横向分为16行，于是得240个边长1步的正方形，即得240个单位正方形，也即240方步；而横、纵步数相乘之积也是240。李淳风注以此论述面积的概念，即所谓面积就是单位正方形的倍数。在李淳风之前的刘徽，虽未如此明说，但有类似记录，如方田章第2问刘徽注称："图纵十四，广十二"。方田术下刘徽注称："此积为田幂。凡广纵相乘谓之幂"。里田术下刘徽注称："方里之中，有三顷七十五亩，故以乘之，即得亩数也"。都可说明面积是由单位正方形的倍数，或是1方步的倍数，或是1亩的倍数。也可以把方形之田地，"纵疏"成其宽度为1个单位的长条，再"横截"成边长为1个单位的正方形。以此度量此田地的面积（如图3·4·2）。

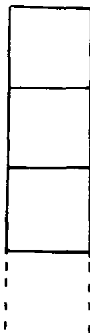


图 3·4·2

关于体积概念，刘徽注也有相类的描述，如商功章第6问答案"一万九百四十三尺八寸"下刘徽注称："八寸者，谓穿地方尺深八寸。此积余有方尺中二分四厘五毫，弃之"。又如第二十五问"程粟一斛，积二尺七寸"下刘徽注称："二尺七寸者，谓方一尺深二尺七寸，凡积二千七百寸"。刘徽注是说，8立方寸，就是截

面为1方尺正方形之方柱，其高或深为8寸；对于此方柱中所余之高或深2分4厘5毫者，乃予以舍弃。刘徽注对“二尺七寸”的解释大意是：在截面为1方尺之方柱中，其深为2尺7寸，实即2立方尺700立方寸；在截面为1方寸之方柱中，其深为2700寸，实即2700立方寸。在“其米一斛，积一尺六寸五分寸之一”下，刘徽注称：“谓积一千六百二十寸”。在“其菽、答、麻、麦一斛，皆二尺四寸十分寸之三”下，刘徽注称：“谓积二千四百三十寸”。刘徽注所谓“一千六百二十寸”，可能于截面为1方寸之方柱中，其高或深为1620寸，实即1620立方寸；刘徽注所谓“二千四百三十寸”，可能于截面为1方寸之方柱中，其高或深为2430寸，实即2430立方寸。一般说来，刘徽对体积的描述，可能把长方体图形，“纵疏横截”成截面为1个单位的正方形之方柱，再截成棱长为1单位的正方体，而长方体的体积，就是这种1个单位正方体的倍数（如图3·4·3）。

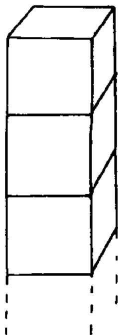


图 3·4·3

至于长度的概念，因为未发现刘徽有其他描述，可能与一般说法雷同。即是用单位长度衡量一线段的倍数作为其长度的。刘徽既然有了面积、体积、长度的概念之后，于方田章、商功章、勾股章分别论证其算法即术文之正确性。

例如，方田章圭田术下，刘徽注称：“半广者，以盈补虚为直田也。亦可半正纵以乘广。按半广乘纵，以取中平之数。故广纵相乘为积步。亩法除之，即得也。”就是用“出入相补原理”把圭田变成宽为“半广”、长为“正纵”之长方形；也可变成宽为“广”、长为“半正纵”之长方形；也即变成与之等积的长方形。刘徽注所说“故广纵相乘为积步”之“广”、“纵”分别指长方形之宽、长，而“广”就是圭田之“半广”或“广”，其“纵”即是圭田之“正纵”或“半正纵”。

又如圆田术下刘徽注称："按半周为纵，半径为广，故广纵相乘为积步也。"刘徽使用"出入相补原理"、极限观念，也即使用割圆术，使圆田变成与之等积的长方形，便按长方形的面积算法以求其积。

再如商功章城、垣、堤、沟、堑、渠术下，刘徽注称："按此术，并上下广而半之者，以盈补虚，得中平之广。以高若深乘之，得一头之立幂。又以袤乘之者，得立实之积，故为积尺"。刘徽用"损广补狭"方法求得上、下广的平均数，即"中平之广"，乘以高或深，即得到长方形之截面面积，再乘以其袤，即得此直棱柱之体积，也即此长方体之体积。

商功章第10问之后，刘徽对直线型立体，则采用棋验法证明。先证明三种基本几何体体积算法的正确性，即堑堵、阳马、鳖臑的体积算法的正确性；再将各种直线型立体化成等积的三种基本几何体，从而证得直线型立体体积算法的正确性。对于圆型立体，刘徽则采用"截割原理"进行论证其算法。如方亭术下，刘徽注称："假令方亭，上方一尺，下方三尺，高一尺，其用棋也，中央立方一，……，凡三品棋，皆一而为三，故三而一，得积尺"。如圆亭术下，刘徽注称："从方亭求圆亭之积，亦犹方幂中求圆幂。乃令圆率三乘之，方率四而一，得圆亭之积。……"

在勾股章，刘徽则利用勾股原理以及有关公式论证各术算法，如葭生中央术，因　$a^2/2(c-b)=(c+b)/2$，　故得

水深：　$b=[a^2-(c-b)^2]/2(c-b)$，

葭长：　$c=[a^2-(c-b)^2]/2(c-b)+(c-b)$，

其中池方为 $2a$，水深为 b，葭长为 c，出水为 $(c-b)$，

又如勾股容方术，因　$(b-x)+x=b$，

于是有　$(a+b):[(b-x)+x]=a:x$，　或 $(a+b):b=a:x$，

故得　$x=ab/(a+b)$；

仿此有　$(a+b):[(a-x)+x]=b:x$，　或 $(a+b):a=b:x$，

则得 $x=ab/(a+b)$,

其中 x 为勾股容方之边长，也是勾边之小股，或是股边之小勾，$(b-x)$ 为股边之小股，$(a-x)$ 为勾边之小勾。

由《九章算术》本身来看，推求平面图形面积、立体图形体积、线段长度都是单纯计算问题，自从刘徽注解《九章算术》以后，把推求平面图形面积、立体图形体积、线段长度的问题提高到几何理论的高度，对于这些问题的术文以几何的理论严加论证，使得这些问题在理论上得到保证；同时使得图形与数值结合于一起，形中有数，数中有形，从而形成中国传统数学的一大特色。

第三节 以计算为中心的中国传统几何理论

在中国传统数学中，对于一些数学问题，很明显是强调数据计算的，例如方田章在论述分数时，不仅强调分数的性质，还特别强调分数的各种计算，如约分术、合分术、减分术、课分术、平分术、经分术、乘分术等，在每一术之前，列举一些问题，在每术之下，刘徽注还说明其中计算的关键及要点；又如在少广章里，对于开方不尽的二次、三次根数给予明确的意义，对于开二方、开三方不尽的分数提出具体运算要求；在方程章，由于解“方程”发现了正负数，不但涉及正、负数的四则运算，刘徽注还把正、负数的加、减法则统一在一起；对于一些算法问题，更为注重算法的计算，如粟米章论述比例算法时，强调比例算法的主导作用，刘徽注说：“诚能分诡数之纷杂，通彼此之否塞，因物成率，审辨明分，平其偏颇，齐其参差，则终无不归于此术也。”在各题中，既强调粮食的兑换比率，又强调计算方法；如在衰分章、均输章，强调衰分算法、反衰算法以及均输算法，虽然衰分、反衰以及均输算法都是由比例算法衍生出来的，但却强调比例算法是这些算法的基础，把计算问题逐步引入到比例算法中；在少广章里，除要

求按部就班计算最小公倍数之外，还要进行开平方、开立方的计算；在盈不足章，十分强调“维乘”算法，刘徽并用“齐、同、通”算法予以解释，不但应用于一般实际问题，还应用于“阶梯函数”等问题；在方程章，则利用“齐、同、通”的观点论述“直除”法以及“互乘对减”法。可见，在《九章算术》中，不论对于数据问题，或是算法问题，都十分强调计算的；在《九章算术》中是如此，而在受到《九章算术》影响的历代中国传统数学的著述中，莫不如此。

但是，在《九章算术》中，对于所谓“几何”问题，即面积问题、体积问题、线段问题的处理，很明显也是强调计算的。例如在方田章，刘徽除按“出入相补”原理论证其面积相当于等积的长方形外，则需要根据各问已知数据按“术”进行计算，即可求得问题之答案；例如圭田术“半广以乘正纵”下，刘徽注称：“半广者，以盈补虚为直田也。亦可半正纵以乘广。按半广乘纵，以取中平之数。故广纵相乘为积步”。由第25问已知，设广为a，正纵为h，此田面积为S，即$a=12$步，$h=21$步，依术则有$S=12\times21=126$（方步）。又如圆田术“半周半径相乘得积步”下，刘徽注称：“按半周为纵，半径为广，故广纵相乘为积步也。……”。以第31问为例设圆周为C，圆径为d，此田面积为S，即$C=30$步，$d=10$步，依术则有

$$S=(1/2\times30)\times(1/2\times10)=75(\text{方步})。$$

在商功章，也是于“术文”下刘徽按“出入相补”原理、“有限分割法”或“截割原理”论证其体积相当于等积的长方体外，则需要依各问的已知数据，按“术”进行计算，即可求得问题之答案；如城、垣术“并上下广而半之，以高若深乘之，又以袤乘之，即积尺”下，刘徽注称：“‘并上下广而半之’者，以盈补虚，得中平之广。以高若深乘之，得一头之立幂。‘又以袤乘之’者，得立实之积，故为积尺”。设第2问下广为b，上广为a，高为h，袤

为d，其体积为V，即$b=40$尺，$a=20$尺，$h=50$尺，$d=1265$尺，则得体积为

$$V=1/2\times(40+20)\times50\times1265=1897500(\text{立方尺})。$$

再如方亭术“上下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一”下，刘徽注称：“假令方亭，上方一尺，下方三尺，高一尺，其用棋也，……”。设第10问下方为b，上方为a，高为h，其体积为V，即$b=50$尺，$a=40$尺，$h=50$尺，按术则得体积

$$V=1/3\times(50\times40+50^2+40^2)\times50$$
$$=(101666+2/3)(\text{立方尺})。$$

再如圆锥术“下周自乘，以高乘之，三十六而一”下，刘徽注称：“圆锥比于方锥，亦二百分之一百五十七。……，其说如圆亭也”。设第13问下周为a，高为h，体积为V，即$a=35$尺，$h=51$尺，其体积则为（取$\pi=3$）

$$V=1/36(35^2\times51)=1/4\pi\times[1/3(35^2\times51)]$$
$$=(1735+5/12)(\text{立方尺})。$$

在勾股章，葭生中央术“半池方自乘，以出水一尺自乘减之，余，倍出水除之，即得水深。加出水数，得葭长”下，刘徽注为：“此以池方半之，得五尺为勾，水深是股，葭长为弦。……，故得葭长也”。设第6问半池方为勾a，水深为股b，葭长为弦c，即半池方为$a=5$尺，出水为$(c-b)=1$尺，按术得

$$b=[a^2-(c-b)^2]\div2(c-b)=12\text{尺},$$
$$c=[a^2-(c-b)^2]\div2(c-b)+(c-b)=13\text{尺}。$$

而第15问勾中容方术“并勾股为法，勾股相乘为实，实如法而一得方一步”下，刘徽注称：“勾股相乘为朱、青、黄幂各二，……，幂图方在勾中，则方之两廉各自成小勾股，而其相与之势不失本率也。……”。设勾为a，股为b，容方边长为x，即$a=5$步，$b=12$步，按术有$(a+b):b=a:x$，或$(a+b):a=b:x$，故得

$$x=(3+9/17)\text{步}。$$

根据以上所述，在《九章算术》中，表面看来推求面积问题、体积问题、线段问题等，属于计算问题，只要依据问题中的已知条件，按术计算即得；由于刘徽把这些问题都纳入于几何之中，并用几何的理论加以论证，因而使得这些问题变成中国的传统几何问题，也就是说在中国的传统几何问题里，蕴藏着丰富的计算问题；不仅在《九章算术》中是如此，即使在中国的其他传统的数学著作中，也是如此，这就是中国传统数学中的另一特色。

第四节　刘徽的几何理论体系及其逻辑系统

通过《九章算术》的内容，不难发现刘徽对中国传统几何论述的理论体系。在推求平面图形的面积问题中，在传统的面积概念基础上，刘徽把长方形面积算法作为基本的算法，然后按直线型平面图形，诸如圭田（即等腰三角形）、邪田（即直角梯形）、箕田（即等腰梯形）的顺序，逐步使之变成等积的长方形，再按长方形的算法予以计算；对于圆型平面图形，如圆田（即圆形）、弧田（即弓形）等，刘徽则是依据“出入相补”原理及极限观念，使之变成相应的长方形，再按长方形面积算法进行计算，对于环田（即圆环形、环缺形），刘徽则把环田的边拉成直线，使成为等积的箕田，再按箕田面积算法进行计算。换句话说，就是以面积概念及长方形面积算法作为出发点，然后由长方形导出等腰三角形、直角梯形、等腰梯形的面积算法，进而导出圆形、圆环形，及弓形的面积算法；所有这些平面图形的面积算法，都是直接或间接利用“出入相补”原理进行推导的；也就是使用“以盈补虚”的办法论证的。据此可知，刘徽必然深知“盈”与“虚”是两个全等形。

对于立体图形，刘徽则是按三种情形分别论证的：首先，在传统的体积概念基础上，把长方体的体积算法，作为基础算法，对

于城、垣、堤、沟、堑、渠（即截面为等腰梯形之直棱柱），利用“出入相补”原理，使变形为等积的长方体，按长方体的体积算法进行计算；其次，推证三种基本几何体的体积算法，即推证堑堵（即底为直角三角形的直棱柱）、阳马（即底为方形、一侧棱与底垂直之四棱锥）、鳖臑（即侧面为直角三角形之四面体）的体积算法，并利用有限分割法，把直线型立体分割成三种基本几何体，根据三种基本几何体的体积算法，从而计算一些直线型立体的体积；然后，对于圆型立体，刘徽则采用“截割原理”，即在圆型立体外作一外切方形立体，依据圆型立体与外切方形立体体积之比为 4：π，进而推求圆型立体的体积。

在计算城、垣、堤、沟、堑、渠体积时，把城、垣、堤、沟、堑、渠变形为等积之长方体，变形中，刘徽必然深知底面积相等、高相等之直棱柱的体积必相等。对于直线型非柱体的体积算法，在确定堑堵、阳马、鳖臑的体积算法基础上，把直线型非柱体分割成三种基本几何体，从而导出其体积算法；刘徽不但把三种基本几何体看作是直线型非柱体的基本元素，还知道这些基本几何体的内在联系；用这种有限分割法推导直线型非柱体的体积算法；是中国的传统方法，也是《九章算术》特色之一，其实用价值很大，直观性强、流传很广。在推证圆型立体体积时，对于圆柱、圆锥、圆台的体积算法，一般在圆柱、圆锥、圆台之外各作一外切正四棱柱、正四棱锥、正四棱台，利用“截割原理”也即圆形立体与其外切方型立体的体积之比恒为 π：4，推求圆型立体的体积算法；对于球的体积算法，刘徽则创立了“牟合方盖”之说，并指出“牟合方盖”与其内切球体积之比为 4：π，从而导出球的体积算法。可以说，在立体体积的推证过程中，刘徽使用三种方法，即“出入相补”原理、“有限分割法”、“截割原理”，正确无误地推证了各种立体的体积算法。据此可知，刘徽必然了解直线、平面与立体之间的一些关系。

对于线段的长度计算，刘徽则是以勾股定理为基础，并把相似勾股形的概念作为基本概念，把相似勾股形的性质作为基本性质；通过这些知识，把推求线段长度的几何问题，转化为代数问题；从而求得线段的长度。

总上所述，《九章算术》及刘徽、李淳风注文的几何部分，是以平面图形面积、立体图形体积、线段长度为其主要内容，以单位正方形、单位正方体、单位线段作为基本概念，把正方形面积算法、长方形面积算法、正方体体积算法、长方体体积算法、线段长度、相似勾股形性质作为基本算法；并以“出入相补”原理、“有限分割法”、“截割原理”、“极限观念”、“勾股定理”、“相似勾股形性质”等方法为基本手段，统帅中国古代的全部几何学内容，其理论结构别有情趣，与西方几何学迥然不同。

第 四 编

刘徽在代数方面的成就

在中国古代,代数方面的成就也有不少领先于世界的记录;例如数的系统、“方程”的解法、方程的理论、级数的推演等;都是具有特色的中国数学。刘徽在这些方面的研究,也有不少传世的贡献。今分别陈述如次。

第一章 刘徽的开方理论

《九章算术》少广章,主要论述已知长方形的面积及其一边之长,推求另一边长的方法;如李淳风注称:“一亩之田广一步,长二百四十步。今欲截取其纵多,以益其广,故曰少广”[①]《九章算术》把开平方、开立方、求圆直径、求球径的问题列于此章之末,可能把这些问题解法看作是“少广术”的特例或推广;刘徽则以面积理论、体积理论对“开方术”、“开立方术”作了阐述。

① 各本李淳风注均为“今欲截取其纵少,以益其广”。于意欠通,今乃根据李籍《九章算术音义》所说“截纵之多,益广之少”。校正为“今欲截取其纵多,以益其广”。

第一节　刘徽以面积理论、体积理论对开方理论的阐述

一、刘徽对开平方理论的论述

《九章算术》少广章第12至16问为开方问题，其各问为：

(12) 今有积五万五千二百二十五步。问：为方几何？

答曰：二百三十五步。

(16) 又有积三十九亿七千二百一十五万六百二十五步。问：为方几何？

答曰：六万三千二十五步。

第16问以后，为"开方术"。

开方术曰：置积为实。借一算步之，超一等。议所得，以一乘所借一算为法，而已除。除已，倍法为定法。其复除，折法而下。复置借算步之如初，以复议一乘之，所得副，以加定法，以除。以所得副从定法。复除折下如前。若开之不尽者为不可开，当以面命之。若实有分者，通分内子为定实。乃开之，讫，开其母报除。若母不可开者，又以母乘定实，乃开之，讫，令如母而一。

第12题相当于求$x^2=55225$之根，下面以其为例阐述刘徽的开方理论。

在刘徽的注文里，对"开方术"以面积理论予以解释；在"开方"二字之下，刘徽注称："求方幂之一面也"。这里是开平方，刘徽解释说，相当于由正方形的面积推求其一边之长。在"超一等"下，刘徽称："言百之面十也，言万之面百也"。这是说，"实"是被开方数，"借一算"是借一算筹用以定位，"步之"是使所借算筹一步一步地移动，"一等"就是数位的一位，"超一等"即是使所借算筹由个位超过十位移到百位；再由百位超过千位移到

万位。又因100的平方根为10，10000的平方根为100；也即所借算筹移至百位，其平方根为十位数字；所借算筹移至万位，其平方根为百位数字。

在术文“而已除”之下，刘徽称：“先得黄甲之面，上下相命，是自乘而除也。”“除已，倍法为定法”之下，刘徽注为“倍之者，豫张两面朱幂定袤，以待复除，故曰定法”。这里刘徽由正方形面积推求其边长进行解释，术文“议所得”，就是议的初商。“一乘”就是乘一次，“除”是减。刘徽注即是说，所得初商相当于先求得“黄甲”正方形的一边，以“黄甲”之边与借算相乘，相当于由被开方数减去“黄甲”边长的自乘之数。也即由被开方数之正方形面积减去“黄甲”正方形面积。为了继续推求平方根之十位数字，乃以所余朱幂长度的二倍以试除。今以第12问为例逐句注解如下：

“置积为实”，置被开方数55225于“实”，“借一算步之，超一等”。使所借算筹由个位每超一位移至万位而止。因“实”的万位数字为5，且$2^2<5<3^2$，故议得初商为2，置初商2于百位；以初商2乘借算20000，置于“实”下为“法”；以初商2乘“法”20000，则得40000，由实减去得55225－40000＝15225。

商	
实	5 5 2 2 5
法	
借算	1

商	
实	5 5 2 2 5
法	
借算	1

商	2
实	5 5 2 2 5
法	
借算	1

商	2
实	5 5 2 2 5
法	2
借算	1

用戴震所补之图，按面积理论解释上述计算步骤：设面积为55225之正方形，议得黄甲正方形之边为200，也即商的百位数字为2，“上（商2）下（法20000）相命”即得2×20000＝40000，也可看作黄甲一边之自乘，即$200^2=$

40000；再由面积为55225之正方形减去黄甲面积40000，其差为55225－40000＝15225，即是朱幂、青幂、黄乙、黄丙面积之和；即是“自乘而除也”。

商	2
实	1 5 2 2 5
法	2
借算	1

由“实”减去40000后；取法数2之二倍4称为“定法”。并向右移至千位以表示4000。今欲求平方根的十位数字，也移借算于百位。即“除已，倍法为定法。其复除；折法而下”。

如上所述，既减去黄甲，所余为朱幂、青幂、黄乙、黄丙之和。今欲求朱幂的宽，故需二倍朱幂的长以试除。即“倍之者，豫张两面朱幂定袤，以待复除，故曰定法”。

商	2
实	1 5 2 2 5
法	4
借算	1

在术文“其复除，折法而下”之下，刘徽注称“欲除朱幂者，本当副置所得成方。倍之为定法，以折、议、乘而以除。如是当复步之而止，乃得相命，故使就上折下”。即是说，将所得之200看作朱幂的长，倍之即2×200＝400作为定法，进行试除，可求得次商。

术文“复置借算步之如初，以复议一乘之”下；刘徽称“欲除朱幂之角黄乙之幂，其意如初之所得也。”在“所得副，以加定法，以除。以所得副从定法”下。刘徽称“再以黄乙之面加定法者，是则张两青幂之袤”。术文接着又称“复除折下如前”。这段大意是：欲求平方根之十位上数字，需置借算于百位。因“实”之千位上数字为15，且4×3＜15＜4×4，乃议得次商为3。置3于商的十位上。以次商乘借算得3×100＝300，与定法相加，得4000＋300＝4300。再乘以次商则得3×4300＝12900，由“实”减去乃得15225－12900＝2325。即“以复议一乘之，所得副，以加定法，以除”。

因黄幂之长为200，朱幂之宽为30，故青幂之长是200＋30＝

商	2 3
实	2 3 2 5
法	4 3
借算	1

230；二青之长共为 460，也可看作是 430+30=460。即是“以所得副从定法”作为定法。也是刘徽注说，“再以黄乙之面加定法者，是则张两青幂之袤”。

若欲求平方根之个位上数字，按术文“复除折下如前”进行，也即“议所得，以一乘所借一算为法，而已除”进行计算。

移借算于个位上，因“实”的十位上数字是 232，且 $46\times5<232<46\times6$，所以议得三商为 5，置三商 5 于商的个位，以借算一乘之，所得当与定法相加，即 $460+5=465$，以三商 5 与之相乘，得 $465\times5=2325$；再由“实”减之适尽。也就是求得 55225 的平方根为 235。

商	2 3
实	2 3 2 5
法	4 6
借算	1

商	2 3 5
实	2 3 2 5
法	4 6 5
借算	1

商	2 3 5
实	
法	4 6 5
借算	1

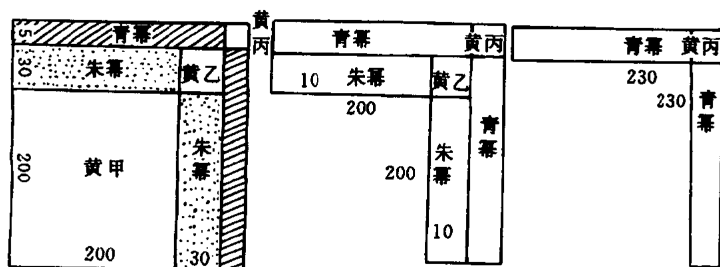


图 4·1·1

二、刘徽对开立方术的论述

少广章第 19 至 22 问为推求立方根的问题，其第 19 问、第 22

问为：

(19) 今有积一百八十六万八百六十七尺。问为方立几何？

答曰：一百二十三尺。

(22)又有积一百九十三万七千五百四十一尺二十七分尺之一十七。问为立方几何？

答曰：一百二十四尺太半尺。

相当于求 $x^3=186867$ $(x=123)$ 和 $x^3=1937541\frac{17}{27}$ $(x=124\frac{2}{3})$之根。

在第22问之后，列有“开立方术”，术文为：

开立方术曰：置积为实，借一算步之，超二等。议所得，以再乘所借一算为法，而除之。除已，三之为定法。复除，折而下。以三乘所得数置中行。复借一算置下行。步之，中超一，下超二等。复置议，以一乘中，再乘下，皆副以加定法。以定法除。除已，倍下、并中从定法。复除，折下如前。开之不尽者，亦为不可开。若积有分者，通分内子为定实。定实乃开之，讫，开其母以报除。若母不可开者，又以母再乘定实，乃开之。讫，令如母而一。

在“开立方”下刘徽注称：“立方适等，求其一面也。”是说开立方相当于推求正立方体的一棱之长；术文“置积为实。借一算步之，超二等”下，刘徽注称：“言千之面十，言百万之面百”。是说被开立方数之“积”；置于“实”。如第19问，置1860867於实处，借一算筹置於“实”之下，由个位起向左移动，每移一步应超两位；若借算移至千位，说明商应在十位；若借算移至百万位，说明商应在百位。

术文“议所得，以再乘所借一算为法，而除之”下，刘徽称：“再乘者，亦求为方幂，以上议命而除之，则立方等也”。因第19问的借算在百万位，而实的百万位数字为1，议得初商为1；故置

初商于商的百位。以初商 1 再次乘借算 1000000，则得 1000000×1×1＝1000000，称为法，由实数减去议得的初商 1 与法数 1000000 的乘积，得 1860867－1000000＝860867。这种运算步骤相当于，由原正方体体积减去棱长为 100 的正方体体积。

术文“除已，三之为定法”下，刘徽注为：“为当复除，故豫张三面，以定方幂为定法也。”由“实”1860367 减“法”1000000 得 860867 后；以 3 乘“法”（即 1000000×1×1），退一位称为“定法”300000 也即是取所谓“法”的三倍。是为了推求三个“方”的积，因而称为“定法”。

术文“复除，折而下”之下，刘徽注为：“复除者，三面方幂以皆自乘之数，须得得折、议、定其厚薄尔。开平幂者，方百之面十；开立幂者，方千之面十。据定法已有成方之幂，故复除当以千为百，折下一等也”。由原正方体减去棱长为 100 的正方体后，其余部分是由六个“方”、六条“廉”、两个“隅”所组成。为了进行复除，即为了推求其次商，也就是推求其十位数字，乃须确定其厚薄，便置借算于千位；即“折下一等也。”

商	商　　1	商　　1
实　1 8 6 0 8 6 7	实　1 8 6 0 8 6 7	实　8 6 0 8 6 7
	法　1	法　3
借算 1	借算 1	借算 1

术文“以三乘所得数置中行”下，刘徽注称：“设三廉之定长”。术文“复借一算下行”下，刘徽注称：“欲以为隅方、立方等未有定数，且置一算定其位”。因有三条“廉”，故以三乘，置于“中行”，称之为“三廉之定长”，或称之为“廉法”；又由于有一“隅”，故置于“下行”，称之为“隅法”。

术文“步之，中超一，下超二等”下，刘徽注称：“上方法，长自乘而一折。中廉法，但有长故降一等。下隅法，无面长故又

降一等也”。前面欲求三“方”的体积，乃“三之为定法”，又因每“方”都只有长边100自乘之数，故须退一位至十万位。即“上方法，长自乘而一折”；乃得300000，此处欲求三“廉”、一“隅”的体积，因每“廉”只有一长边为100，故退一位至万位。因“隅”无长边，故再退一位至千位。即注文“中廉法，但有长故降一等。下隅法，无面长故又降一等也”。

术文“中超一，下超二等”之“超”字，应作退位解。即中行的数退一位称为“廉法”，下行的数退两位称为“隅法”。

商	1	商	1	商	1 2	
实	8 6 0 8 6 7	实	8 6 0 8 6 7	实	8 6 0 8 6 7	副置
法	3	法	3	法	3 6 4	
		中行	3	中行	3	6
		下行	1	下行	1	4
借算	1	借算	1	借算	1	

术文“复置议，以一乘中”下，刘徽注称：“为三廉备幂也。”术文“再乘下”下，刘徽注称：“令隅自乘为方幂也”。术文“皆副以加定法。以定法除”下，刘徽注称：“三面、三廉、一隅皆已有幂，以上议命之而除去三幂之厚也”。以定法300000试除实数860867，议得次商数字为2，因借算在千位，故置次商于十位。以次商数字2乘中行“廉法”乃得30000×2＝60000。再乘下行之“隅法”则得1000×2×2＝4000。即术文所说“一乘中，再乘下”。将此二数副置一旁与所谓定法300000相加，即“皆副以加定法”。即

$$300000+60000+4000=364000$$

作为定法。

以次商数字2乘定法364000得728000；由实数860867减去

此数 728000 得 132867。即“以除定法”。也就是“三面、三廉、一隅皆已有幂，以上议命之而除去三幂之厚也。”

商	1 2	
实	1 3 2 8 6 7	副置
法	3 6 4	
中行	3	6
下行	1	4
借算	1	

商	1 2
实	1 3 2 8 6 7
法	4 3 2
中行	
下行	
借算	1

商	1 2
实	1 3 2 8 6 7
法	4 3 2
中行	3 6
下行	1
借算	1

商	1 2 3	
实	1 3 2 8 6 7	副置
法	4 4 2 8 9	
中行	3 6	108
下行	1	9
借算	1	

术文“除已，倍下、并中从定法”下，刘徽注称：“凡再以中，三以下，加定法者，三廉各当以两面之幂，连於两方之面，一隅连於三廉之端，以待复除也。言不尽意，解此要当以棋乃得明耳。”由实数 860867 减去 728000 余 132867，以 2 乘副置下行之数 4000 得 8000，与副置中行之数 60000 以及定法 364000 相加

得　　$$8000+60000+364000=432000,$$

即是“除已，倍下、并中从定法”。

今欲推求立方根之个位数字，须将借算移至个位。因而术文称：“复除，折下如前”。也即将 432000 置于法，并向右退一位为 43200，称为“定法”。

以 43200 试除 132867，议得三商数字为 3，置 3 于商的个位。以 3 乘中行“廉法”360 得 1080，以 3 再乘下行“隅法”1 得 9，

皆副置一旁，与“定法”43200 相加得：

1080+9+43200=44289

作为法。以三商数字 3 乘法数 44289 得 132867，称为定法由实数 132867 减之适尽；故知实数 1860867 之立方根为 123。

以上所述，即是开立方之算法。

图 4·1·2

图 4·1·3

图 4·1·4

图 4·1·5

图 4·1·6

第二节　“命”字的研究、“等”的意义

一、“命”字的研究

开方术术文有“若开之不尽者为不可开，当以面命之”一句。若被开方数非完全平方数，则开方不尽而有余，古代称为“不可开”。如果仅就字面而论，“以面命之”当是以“面”数而命分；即 $\sqrt{a^2+r}=a+r/a$。这种理解，等同于李潢之说，“以面为母，以余为子”。这一说法显然不合理。李俨以为，

$$\sqrt{a^2+r}=a\cdots\cdots r,$$

这种说法也值得研究。在“当以面命之”下，刘徽注称：

“术或有以借算加定法而命分者，虽粗相近，不可用也。凡开积为方，方之自乘当还复其积分。令不加借算而命分，则常微少。其加借算而命分，则又微多。其数不可得而定。故惟以面命之，为不失耳。譬犹以三除十，以其余为三分之一，而复其数可举。不以面命之，加定法如前，求其微数。微数无名者，以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母。退之弥下，其分弥细，则朱幂虽有所弃之数，不足言之也。”

在这里刘徽所说是：若把术文“以面命之”之“命”字理解为命分的话，刘徽提出古代对于非完全平方数的平方根近似值的两种取法，即“加借算而命分”、“不加借算而命分”；也就是

$$\sqrt{a^2+r}=a+r/(2a+1);\quad \sqrt{a^2+r}=a+r/(2a)。$$

刘徽认为“凡开积为方，方之自乘当还复其积分”。于是说前者“微多”，而后者则为“微少。即

$$a+r/(2a+1)<\sqrt{a^2+r}=<a+r/(2a),$$

今证明如次：因 $r^2/4a^2>0$，

故　　$a^2+r+r^2/4a^2>a^2+r$，

开方得　$a+r/2a>\sqrt{a^2+r}$。
可见嫌分母“微少”。若以 $2a+1$ 为分母，则又嫌其“微多”。
因　$a^2<a^2+r<(a+1)^2$，
故　$r<(a+1)^2-a^2=2a+1$，
而　$[a+r/(2a+1)]^2=a^2+r-[(2a+1)-r]r/(2a+1)^2<a^2+r$，
于是　$\sqrt{a^2+r}>a+r/(2a+1)$。
可见“其数不可得而定”。

如果理解“以面命之”为 $\sqrt{a^2+r}=a\cdots\cdots$ 余 r，虽然这种理解既不“微多”，也不“微少”，是否“为不失耳”，仍然值得考虑。

如果理解“以面命之”为 $\sqrt{a^2+r}=a+r/a$，或理解“以面命之”为

$$\sqrt{a^2+r}=a+r/2a,\qquad \sqrt{a^2+r}=a+r/(2a+1),$$

则都是错误的，因为这些式子，不是“微多”，便是“微少”，而“方之自乘”则不能“还复其积分”。在这里，刘徽只以“命分”解释了“以面命之”之“命”字，对于“以面命之”之“命”字究竟如何解释，刘徽也未曾交待清楚。

在《九章算术》及刘徽、李淳风注文中，所用“命”字，多表示“命分”，即是以某数为分母命名一个分数。如：(1) 合分术术文“不满法者，以法命之”；(2) 平分术术文“以法命平实”；(3) 环田术刘徽注“以等数除之而命分”；(4) 经率术刘徽注“等数除之而命分”；(5) 经术术刘徽注“不尽而命分者”；(6) 刘徽注又称“实见不满，故以命之”；(7) 衰分术术文“不满法者，以法命之”；(8) 开方术刘徽注“术或有以借算加定法而命分者”；(9) 刘徽注又称“令不加借算而命分”；(10) 刘徽注又称“其加借算而命分”；(11) 开立方术刘徽注“术亦有以定法命分者”；

(12) 商功第5问刘徽注“等数约之而命分也”；(13) 商功第6问刘徽注“等数约之而命分也”。在《九章算术》及刘徽、李淳风注文中，也有以“命”字表示“乘”，如：(1) 大广田术刘徽注“命母入者还须出之”；(2) 开方术刘徽注“上下相命”；(3) 刘徽注又称“乃得相命”；(4) 开立方术刘徽注“以上议命而除之”；(5) 刘徽注又称“以上议命之而除去三幂之厚也”；(6) 开立圆术刘徽注“令其幂七十五再自乘之为面，命得外立方积四十二万一千八百七十五尺之面”；(7) 正负术刘徽注“令上下相命而已”。其中李淳风涉及“命”字的注文与刘徽相应的注文意义多所雷同。但是，开方术术文“若开之不尽者为不可开，当以面命之”下，刘徽注“术或有以借算加定法而命分者，……，故惟以面命之，为不失耳。……，不以面命之，加定法如前，求其微数。……不足言之也。”其中之“面”字，无妨解释为正方形的边，由这段注文来看，刘徽虽未对“命”字给予正面诠释，但却似大量“命分”的词句进行解释，而且还说“不以面命之，加定法如前，求其微数”。因此可以说，刘徽把“命”字解释为“命分”的倾向是异常明显的。

但有人认为：这里“以面命之”之“命”字是“命名”的意思；就是说，《九章算术》及刘徽都认识到“不可开”将遇到一种新数①，而“以面命之”即是以所谓正方形的边命名这种新数，实即所谓的无理数。这种说法不仅超越了时代，而且是以今人之说代替了古人之见；同时，也引起不少同行人的纷纷议论。

二、“等”字的意义

在开方术术文“借一算步之，超一等”一语下，刘徽注称：“言百之面十也，言万之面百也”。意思是说假借一枚算筹，用以

① 李继闵，《九章算术》及其刘徽注研究. 西安：陕西人民教育出版社，1990

表示定位；若被开方数是百位上的数，其平方根当是十位上的数；若被开方数是万位上的数，其平方根当是百位上的数。其中“等”，就是数位的意思，“超一等”就是在移动算筹时，每每超越一个数位。如李淳风注称：“‘借一算’者，假借一算，空有列位之名，而无除积之实。方隅得面，是故借算列之於下也。‘步之，超一等’者，方十自乘其积有百，方百自乘其积有万，故超位至百而言十，至万而言百也。”李淳风注说得十分清楚，其中“等”就是现今所谓数位，而“超一等”就是在移动所借算筹时，每每超越一个数位；相当于现今笔算开方中的分节。

在开立方术术文“借一算步之，超二等”下，刘徽注称：“言千之面十，言百万之面百”。也是说假借一枚算筹，用以表示定位；若被开立方数是千位上的数，其立方根当是十位上的数；若被开立方数是百万位上的数，其立方根当是百位上的数。其中“等”，也就是数位的意思，“超二等”就是在移动所借算筹时，每每超越两个数位。李淳风注称：“‘借一算步之，超二等’者，立方求积，方再自乘，就积开之，故超二位，言千之面十，言百万之面百也”。李淳风注说得清楚，其中“等”就是现今所谓数位，其“超二等”就是在移动所借算筹时，每每超越两个数位；相当于现今笔算开立方中的分节。李淳风注所说，不止清楚而且正确，可以作为现今对术文“等”、“超一等”、“超二等”理解的典范、标准。

《张邱建算经》不称“等”，而称为“位”，如卷中第19问草文称：“借一算子于下。常超一位，步至百止”。又如卷下第30问草文称：“借一算子於下，常超二位，步至百而止”。再如《孙子算经》卷中第19问术文称：“次借一算为下法，步之，超一位，至百而止”。

《张邱建算经》、《孙子算经》所说的“位”，即是现今所谓数位；如《孙子算经》卷上称：“凡算之法，先识其位。一从十横；

……"。"凡除之法，……，假令六为法，百为实。以六除百，当进之二等，令在正百下，以六除一，则法多而实少，不可除，故当退就十位。……，故或步法十者置于十位，百者置于百位。(上位有空绝者，法退二位)"。"凡乘之法，重置其位。上下相观，上位有十步至十，……，以上命下，所得之数列於中位。……，上位乘讫者先去之。下位乘讫者则俱退之"。其中"先识其位"之"位"字，就是数位的意思；而"当进之二等"之"等"字，也是数位的意思；所以接着又说"故当退就十位"、"步法十者置于十位，百者置于百位"、"法退二位"等；至于"凡乘之法"中，其"上位"、"中位"、"下位"则是分别指"上行"、"中行"、"下行"的意思；可见，《张邱建算经》、《孙子算经》的"位"基本上都是指"数位"而言的。

至于《张邱建算经》、《孙子算经》所谓"步至百止"、"步至百而止"以及"至百而止"等语的原意为：由于被开平方数、被开立方数、被开平方数分别是"一十二万七千四百四十九"、"一百五十七万二千八百六十四"、"二十三万四千五百六十七"，所借之算筹应置于相当于其根是百位上的数，故分别称为"至百而止"的词句。

又如《夏侯阳算经》也有类似记载，如卷上"四曰：开平方除。(借一算为下法，步之，超一位。幂方十，其积有百。幂方百，其积有万。至百言十，至万言百，故曰开平方除也)"。"五曰：开立方除。(借一算为下法，步之，超二位。立方十，其积有千。立方百，其积有万。至千言十，至百万言百，故曰开立方除也)"。在这里，《夏侯阳算经》也是把"位"作为数位的代名词：但有时也用"等"字表示数位，如卷上"时务云：十乘加一等，百乘加二等，千乘加三等，万乘加四等。十除退一等，百除退二等，千除退三等，万除退四等"。

根据以上所述，在《张邱建算经》等书之中，有时称"数

位”为“等”，有时称为“位”；而在《九章算术》中，则称“数位”为“等”。

三、“以面命之”之类词句的意义

《九章算术》少广章开方术称：“若开之不尽者为不可开，当以面命之”，刘徽注称：“术或有以借算加定法而命分者，虽粗相近，不可用也。……，令不加借算而命分，则常微少。其加借算而命分，则又微多。其数不可得而定。故惟以面命之，为不失耳。……，不以面命之，加定法如前，求其微数。……，不足言之也。”

按照刘徽注文的精神，刘徽一方面说“加借算而命分”则不可用；一方面又说“不加借算而命分”，则常微少：“加借算而命分”，则又微多。刘徽还说“惟以面命之，为不失耳。”并说“不以面命之”，可以求其微数。由刘徽注文来分析，刘徽虽未正面明确解释“以面命之”的含义，但由注文来推测，刘徽多处使用“命分”进行解释，虽不能说刘徽以“以面命分”解释“以面命之”的意思，但可以说“以面命分”与“以面命之”有一定的联系；“以面命分”就是以“面”命名一个分数的意思，刘徽没有给出“以面命之”的正面解释，在注文“故惟以面命之，为不失耳”下，刘徽注举例说“譬犹以三除十，以其余为三分之一，而复其数可举”。刘徽在这里举以除法的例子，显然是不适当的。如果认为这一例证重点在于说明可以复原的话，即 $10\div3=3+1/3$，乘以 3 之后，则得 $[10\div3]\times3=[3+1/3]\times3$，即是 $10=9+1$。那么，在开方术里，如何解释“以面命之”，则是一个值得探讨的问题。

但是，有人认为“以面命之”是命名一种新数；说《九章算术》以及刘徽都认识到开方不尽数，即“不可开”的数是一种新数，即是以“以面命之”这种新数，就是以“面”即正方形的边

命名这种新数。因而有人则说："'面'，即开方不尽而引进的无理根数"[①]。又说："'面'作为与现代数学中所谓'根数'同义的专门术语"[②]。还进一步说："对于这种情形，或者引进新数称之为'面'，或者用求微数法以十进分数来无限逼近。并且中算家不仅会用十进分数作近似计算以满足实用的需要，而且会用'面'（即无理根数）来进行无理数的精确的理论计算"[③]。这种论说，看来似乎很有道理，但是仔细推敲起来，不无漏洞；因为《九章算术》及刘徽是否发现开方不尽数是一种新数，是值得研究的问题。

《九章算术》是在自然数即正整数的基础上进行论证的，由于除法的需要，发展了分数，又由于解"方程"的需要，发展了正、负数；在《九章算术》中，由自然数扩展成为有理数；这是确凿的事实，也是大家所公认的结论。如约分术刘徽注称："按约分者，物之数量，不可悉全，必以分言之。"就是说，表示事物的数量，不可能都表示以正整数，根据需要，有时必须表示以分数。这是刘徽十分明确的解说，是说正整数不敷应用时，必须扩充至分数。又如"方程"章正负术刘徽注称："今两算得失相反，要令正负以名之。正算赤，负算黑。否则以邪正为异。"又说："方程自有赤黑相取，左右数相推求之术。而其并减之势不得广通，故使赤黑相消夺之。……，故赤用黑对则余黑，黑用赤对则余赤。赤黑并于本数，此为相益，皆所以为消夺。消夺之与减益成一实也。……，无人，为无对也。无所得减，则使消夺者居位也。"这是说，两数相减，若够减时，则其差为正；若不够减时，其差为负。从而创立了正、负数的概念。也即发展了新数，形成有理数。

可是，在开方术里，《九章算术》只说"若开之不尽者为不可开，当以面命之。"而刘徽注虽未对"以面命之"作出正面解释，

①②③ 李继闵.《九章算术》及其刘徽注研究. 西安：陕西人民教育出版社，1990，台北：九章出版社，1991

但也未明确"不可开"的数即是一种新数。如果认为《九章算术》及刘徽都意识到这是一种新数，似应补充必要的论据。

退一步说，即使理解"以面命之"为以"面"命名一种新数，这种新数只不过是一些二次根数，也绝不是无理数。同时，在开立方术里，《九章算术》只说："开之不尽者，亦为不可开"。也即只说明非完全立方数的立方根，也是"不可开"，并没有说明当以"面"命之的词句。所以，若以为《九章算术》及刘徽都意识到"新数"的话，至多也不过是一些二次根数；至于开方术、开立方术所说

"若实有分者，通分内子为定实。乃开之，讫，开其母报除。若母不可开者，又以母乘定实，乃开之，讫，令如母而一。"

"若积有分者，通分内子为定实。定实乃开之，讫，开其母以报除。若母不可开者，又以母再乘定实，乃开之，讫，令如母而一。"

这些论述，只不过是二次,、三次根式运算性质，并不能说明这是对新数的记载。

在《九章算术》中，除论及二次根数外，尚涉及一种无理数，就是"圆周率"。刘徽及李淳风都把"圆周率"看作是一种特殊的分数，还逐次推求其精密的数值。并没有看作是一种新数。所以对《九章算术》及刘徽、李淳风注文应该深切体会其精神实质，切不可以今人之见代替古人之说。

第三节　"少广术"与"开方术"的关联

就字义而论，"少广"即是广少而纵多，如李淳风注称："一亩之田广一步，长二百四十步。今欲截取其纵多，以益其广，故曰少广"。用现代术语来说，就是已知长方形的面积及其宽边之长，求其长边的算法；而《九章算术·少广》第1至第11问，可作为例证。

在“少广”二字下，大典本、影宋本之李淳风注皆为：“一亩之田广一步，长二百四十步。今欲截取其纵少，以益其广，故曰少广”。李籍《九章算术音义》称：“广少，纵多，截纵之多，益广之少，故曰少广”。可见“少广”即是广少而纵多，需截纵之多，以益广之少。由于“今欲截取其纵少，以益其广”于意欠通，乃较改为“今欲截取纵多，以益其广”。

在“少广”二字之下，列有少广术，其术文为：

“少广术曰：置全步及分母、子，以最下分母遍乘诸分子及全步，各以其母除其子，置之于左。命通分者，又以分母遍乘诸分子及已通者，皆通而同之，并之为法。置所求步数，以全步积分乘之为实。实如法而一，得纵步。”

其大意为：将田亩宽边整步数及其分母、子按大、小次序由上到下排列起来，以最下之分母遍乘整数及各分数的分子，每一分数都以自己的分母除分子，也即约简每一分数，将约简的分数置之于左；就像这样，逐步使各分母遍乘整数及诸分子并约简后，直至各个分数都化成了整数为止。然后以这些数之相加和作为除数；再以田亩面积平方步数乘各分母之积，作为被除数；被除数除以除数，则得田亩的长边。

在“少广术”后，列有11问，今以第10问为例诠释如次：

今有田广一步半、三分步之一、四分步之一、五分步之一、六分步之一、七分步之一、八分步之一、九分步之一、十分步之一、十一分步之一。求田一亩，问：纵几何？

答曰：七十九步八万三千七百一十一分步之三万九千六百三十一。

术曰：下有一十一分，以一为二万七千七百二十，半为一万三千八百六十，三分之一为九千二百四十，四分之一为六千九百三十，五分之一为五千五百四十四，六分之一为四千六百二十，七分之一为三千九百六十，八分之一为三千四百六十五，九分之一

为三千八十，一十分之一为二千七百七十二，一十一分之一为二千五百二十，并之得八万三千七百一十一，以为法。置田二百四十步，亦以一为二万七千七百二十乘之，为实。实如法得纵步。

以现今形式表示其算法如下：

各数	乘以 11	各数乘以 10	各数乘以 9	各数乘以 4	各数乘以 7
1	11	110	990	3960	27720
$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{110}{2}=55$	495	1980	13860
$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{110}{3}$	$\frac{990}{3}=330$	1320	9240
$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{110}{4}=\frac{55}{2}$	$\frac{495}{2}$	$\frac{1980}{2}=990$	6930
$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{110}{5}=22$	198	792	5544
$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{110}{6}=\frac{55}{3}$	$\frac{495}{3}=165$	660	4620
$\frac{1}{7}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{110}{7}$	$\frac{990}{7}$	$\frac{3960}{7}$	$\frac{27720}{7}=3960$
$\frac{1}{8}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{110}{8}=\frac{55}{4}$	$\frac{495}{4}$	$\frac{1980}{4}=495$	3465
$\frac{1}{9}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{110}{9}$	$\frac{990}{9}=110$	440	3080
$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{110}{10}=11$	99	390	2772
$\frac{1}{11}$	$\frac{11}{11}=1$	10	90	360	2520

将此问已知整数、分数排列于一起，以最下分母遍乘各数，约分，置之于左。再逐次使其他分母遍乘各数，约分，若皆化为整数，则并之作为除数。其术文“各以其母除其子”，即是约分；“命通分”，即是逐次使分母遍乘各数后以其分母命分，也即约分；

“皆通而同之”，即是皆化为整数。其各整数分别为：27720，13860，9240，6930，5544，4620，3960，3465，3080，2772，2520，其相加之和为 83711 作为除数。而 83711 是各数 1、1/2、1/3、1/4、1/5、1/6、1/7、1/8、1/9、1/10、1/11 和的分子，27720 是 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11 的最小公倍数，可作为各数和的分母。故有：

1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6+1/7+1/8+1/9+1/10+1/11=83711/27720。

然后将 1 亩田的平方步数 240 乘以公分母 27720，作为被除数。被除数除以除数，即得此田长边之值：

240×27720÷83711=79+39631/83711。（单位：步）

不难看出，推求“除数”的运算过程，就是推求 1，2，3，…，11 最小公倍数的过程；这一算法是推求最小公倍数的算法，虽然其运算步骤没有达到现今规范化的程度，但其计算理论、计算方法却是正确无误的。

例如在少广章前 11 问中，除第 5、11 问外，有 9 问的计算完全正确无误；其第 5、11 问，可能因未及约简所致。在中国传统数学及《九章算术》中，经常使用不见诸记载的逐步约分法；如果不使用逐步约分法的话，在少广章各问中，将是无法推求其最小公倍数的。反言之，既然在少广章有 9 问的计算完全正确，足以证明在这里是使用了逐步约分法的。

少广术之前部分，即求“法数”之前部分，实际是推求最小公倍数的方法，而其后部分，即求“法数”之后部分，是推求田亩的长边算法；如刘徽注称：“此以田广为法，以亩积步为实。法有分者，当同其母，齐其子，以同乘法实，而并齐于法。今以公母乘全步及子，子如母而一，并以并全法，则法实俱长，意亦等也。故如法而一，得纵步数。”

其大意是说：若已知田亩广边是整数，则有：田亩纵边=田

亩积步÷田亩广边；若已知田亩广边是分数，则有：田亩纵边＝田亩积步×公分母÷田亩广边诸分子之和。

少广章第12至16问，都是已知“积”若干，推求为“方”几何的问题；对这些问题的解法，《九章算术》给以“开方术”。根据刘徽注文“求方幂之一面也”的精神，所谓“开方术”，就是已知正方形的面积，推求其一边之长的算法。少广术既是已知长方形面积及其一边，推求另一边之长的方法；而开方术则可视为少广术的一种特殊情形，所以开方术置于少广术之后，是有其逻辑次序道理的。至于“开圆术”，则是“开方术”的一项实际应用；“开立方术”则可看作是“开方术”的推广，“开立圆术”即是“开立方术”的一项实际应用。由少广章全章的布局来看，《九章算术》的编纂者是具有一定逻辑水平的。

第二章 刘徽的“方程”理论

《九章算术·方程》全章列有18问，不止有二元一次方程组、三元一次方程组、五元一次方程组，还有六元一次不定方程组；至于方程组的解法，《九章算术》给予所谓“直除法”，在此基础上，刘徽创立了多种新的解法，并提出解法的理论依据和有确切解的条件；由于解方程组的需要，《九章算术》创立了正、负数的学说，刘徽则对正、负数给予正确的定义，还以辩证的观点对正、负数的加、减法则给予统一的论述。《九章算术·方程》内容丰富，刘徽的创造十分杰出、新颖，给中国传统数学增加了不少光辉色彩。

第一节 刘徽对“方程”理论的论述

一、《九章算术》对“方程术”的论说

《九章算术·方程》章第1问为：

今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问：上、中、下禾实一秉各几何？

答曰：上禾一秉，九斗四分斗之一；

中禾一秉，四斗四分斗之一；

下禾一秉，二斗四分斗之三。

在第1问之后，列有“方程术”，方程术为：

方程术曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗，于右方。中、左行列如右方。以右行上禾遍乘中行而以直除。又乘其次，亦以真除。然以中行中禾不尽者，遍乘左行而以直除。左

方下禾不尽者，上为法，下为实。实即下禾之实。求中禾，以法乘中行下实，而除下禾之实。余如中禾秉数而一，即中禾之实。求上禾，亦以法乘右行下实，而除下禾、中禾之实。如上禾秉数而一，即上禾之实。实皆如法，各得一斗。

《九章算术》所列方程术，是结合第1问论述的，因而必需按第1问题意详加陈述：术文说："置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗，于右方。中、左行列如右方"。今置上禾3秉、中禾2秉、下禾1秉、实39斗为右行；又置上禾2秉、中禾3秉、下禾1秉、实34斗为中行；再置上禾1秉、中禾2秉、下禾3秉、实26斗为左行。即

	左行	中行	右行
上禾	1	2	3
中禾	2	3	2
下禾	3	1	1
实	26	34	39

设上禾、中禾、下禾秉数分别为 x、y、z，则得

$$3x+2y+z=39,$$
$$2x+3y+z=34,$$
$$x+2y+3z=26。$$

术文"以右行上禾遍乘中行而以直除。又乘其次，亦以直除"。即以右行上禾秉数3遍乘中行各项，由中行连续减去右行各项；则中行头位为零，然后又以右行上禾秉数3遍乘左行各项，由左行各项连续减去右行各项，则左行头位为零。即

	左行	中行	右行
上禾	1	6	3
中禾	2	9	2
下禾	3	3	1
实	26	102	39

	左行	中行	右行
上禾	1		3
中禾	2	5	2
下禾	3	1	1
实	26	24	39

	左行	中行	右行
上禾	3		3
中禾	6	5	2
下禾	9	1	1
实	78	24	39

$$\begin{cases}3x+2y+z=39\\6x+9y+3z=102\\x+2y+3z=26\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}3x+2y+z=39\\5y+z=24\\x+2y+3z=26\end{cases}\quad \begin{cases}3x+2y+z=39\\5y+z=24\\3x+6y+9z=78\end{cases}$$

术文“然以中行中禾不尽者，遍乘左行而以直除”。即当左行头位为零后，以中行中禾秉数5遍乘左行各项，由左行连续减去中行各项，左行中禾秉数为零。左行只有下禾秉数、下实两项，以下禾秉数作为除数，以下实作为被除数，被除数除以除数即得下禾一秉之斗数。即术文所说：“左方下禾不尽者，上为法，下为实。实即下禾之实”。即

	左行	中行	右行
上禾			3
中禾	4	5	2
下禾	8	1	1
实	39	24	39

	左行	中行	右行
上禾			3
中禾	20	5	2
下禾	40	1	1
实	195	24	39

	左行	中行	右行
上禾			3
中禾		5	2
下禾	36	1	1
实	99	24	39

$$或 \quad \begin{cases}3x+2y+z=39\\5y+z=24\\4y+8z=39\end{cases}\quad \begin{cases}3x+2y+z=39\\5y+z=24\\20y+40z=195\end{cases}\quad \begin{cases}3x+2y+z=39\\5y+z=24\\36z=99\end{cases}$$

由左行可知，下禾36秉，下实99斗，易于求得下禾一秉之斗数为99/36斗，至此，术文便继续说：“求中禾，以法乘中行下实，而除下禾之实。余如中禾秉数而一，即中禾之实”。意即为了推求中禾，而以“法”即左行下禾之秉数36乘中行之下实24，即36×24，由此数36×24=864减去左行下禾之实99，再除以中行中禾之秉数5，乃得

$$[36\times24-99]\div5=[864-99]\div5=153,$$

即是“中禾之实”；但非中禾一秉之实。

术文又说：“求上禾，亦以法乘右行下实，而除下禾、中禾之

实。如上禾秉数而一，即上禾之实”。为了推求“上禾之实”，以“法”即左行下禾之秉数36乘右行下实39，即36×39，由此数36×39=1404减去左行下禾之实99以及中行中禾之实［36×24−99］÷5=153，在除以右行上禾秉数3，乃得

［36×39−99−2×153］÷3=333，

此即“上禾之实”，但非上禾一秉之实。

术文最后说：“实皆如法，各得一斗”。前面求得的“下禾之实”、“中禾之实”以及“上禾之实”分别为

99，　［36×24−99］÷5=153，　［36×39−99−2×153］÷3=333，

都分别除以“法”数36，则各得下禾一秉之实、中禾一秉之实、上禾一秉之实；也即分别得到下禾一秉之斗数、中禾一秉之斗数、上禾一秉之斗数分别为

99/36=(2+3/4)(斗)，　153/36=(4+1/4)(斗)，
333/36=(9+1/4)(斗)。

以上是《九章算术》对方程术的论述，由最初图示到三角图示，体现了《九章算术》的“直除法”的运算步骤；而三角图示以后的步骤则相当于代入法的步骤。刘徽对于“方程术”则提出杰出的见解，今介绍如下：

二、刘徽对“方程术”义、理的论述

在“方程”二字之下，刘徽注称：“程，课程也。群物总杂，各列有数，总言其实。令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之方程。行之左右无所同存，且为有所据而言耳。”刘徽注“程，课程也。……，并列为行，故谓之方程。”是刘徽对“方程”一词所下的定义；就数学的发展而论，这是最早较为正确的定义。

李籍《九章算术音义》称：“方者，左右也。程者，课率也。

左右课率，总统群物，故曰方程"。杨辉《详解九章算法》说："方者，数之形也；程者，量度之总名，亦权、衡、丈、尺、斛、斗之平法也。尤课分明多寡之义"。程大位《直指算法统宗》称："方，正也。程，数也"。李潢《九章算术细草图说》说："两行相并为方，多少相课为程"。依据各家之说，其中"方"，即是方形，"程"即是表达相课之意，或理解为表达式。"方程"即是方形表达式。对于任一问题来说，如含有若干个相关数据，将这些相关数据并肩排列成方形，则称之为"方程"。就其表面形式而论，所谓"方程"，就是现今的增广矩阵。刘徽注："群物总杂，各列有数，总言其实"。即是说每行的组成方法，群物聚集于一起，有几物则列几位，在每位上则置以各该物之数量，最后列出各物的总实数。如第一问，所列右行为：上位置以上禾之数 3，中位置以中禾数 2，下位置以下禾数 1，最后置以各物之总实 39。其中、左行也依据题意列出，即方程组为：

	左	中	右
上禾	1	2	3
中禾	2	3	2
下禾	3	1	1
实	26	34	39

或

$$3x+2y+z=39,$$
$$2x+3y+z=34,$$
$$x+2y+3z=26。$$

注文"令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行"。是说问题里有几物，则需列出几行或几程；所列之行数或程数，应以问题的物数为准。在每行或每程之间的相关数量，可看作是一组成比率的数，或看作是一组"率"。如上述"方程"中，左行的 1、2、3、26；中行的 2、3、1、34；右行的 3、2、1、39，这些每行的数量都各自是一组"率"。即术文"每行为率"。

注文"行之左右无所同存，且为有所据而言耳"。为了使"方程"有确切解，刘徽不但提出"方程"的个数必需与"未知数"即物数的个数相同，即"皆如物数程之"。还提出这一理论，即是说，

在“方程”中，每行与其左、右行之间的数量即“率”需是不尽相同或不尽成比例的，也就是在“方程”中，需无相依方程。即“行之左右无所同存”。又说在“方程”中，每行必需合于实际而有所依据，也即不得有矛盾方程。即“且为有所据而言耳”。可见，为使“方程”有确切解，既不得有相依方程，又不得有矛盾方程；刘徽深知方程组有确切解的充分必要条件。

有人以为，《九章算术》所论“方程”并非是现今之方程组，认为《九章算术》中，没有“等号”的概念，所以构造不成方程，只能组成数字的增广矩阵。[①] 这种见解，未免过于狭窄，《九章算术》虽然没有现今所谓的等号“＝”的记法，但《九章算术》却有等号的概念和意义；现今的等号有双重意义，其一是两边的数量相等；其二是两边的意义相同。前者是“等于”，而后者则是“是”或“为”。例如《九章算术》方田术所说：“广纵数步相乘得积步。以亩法二百四十步除之，即亩数。百亩为一顷”。若写为近代形式，其中具有三个等号：即

田广步数×田纵步数＝田亩积步；

田亩积步数÷240 方步＝田的亩数；

100 亩＝1 顷。

术文所说“广纵数步相乘得积步”，是说田广步数与田纵步数相乘，所得结果“即是”田的积步数；而“以二百四十步除之，即亩数”。即是说田亩的积步数除以一亩田的积步数，所得“即是”田地的亩数；“百亩为一顷”。即是 100 亩的田地“等于”1 顷的田地。可见这一段术文就包括三个“等号”。又如“方程术”刘徽注说“群物总杂，各列有数，总言其实”。其中“总言”，就是说出各禾的斗数之总和。如“方程”章第 1 问所列右行，实际即是

① 李继闵．《九章算术》及其刘徽注研究．西安：陕西人民教育出版社．1990，210

上禾三秉斗数+中禾二秉斗数+下禾一秉斗数=各禾斗数之和三十九斗，或 $3x+2y+z=39$。

依此可见，认为《九章算术》中没有“等号”的说法，是值得商榷的。

术文“置上禾三秉，……，于右方。中、左行列如右方”下，刘徽注称：“此都术也，以空言难晓，故特系之禾以决之。又列中、左行如右行也”。刘徽认为“方程术”是一种总的方法，由于以未知数列出方程，比较抽象，不易了解。欲使之具体化，乃联系以“禾”，即是联系上禾、中禾、下禾表示各种未知数以列方程。当列出右行之后，可仿照列出中、左两行。

刘徽注“此都术也”至“又列中、左行如右行也”一段，显然是术文“置上禾三秉，……，中、左行列如右方”之注文，按照惯例，理应置于术文之后，但各版本却都误置于术文之前，今依意校正，移至术文之后。有人认为：“将‘此都术也’至‘如右行也’凡二十五字移至术文‘列如右方’之下，实无必要”①；却没有提供任何理由。

术文“以右行上禾遍乘中行而以直除”下，刘徽注为：“为术之意，令少行减多行，反覆相减，则头位必先尽。上无一位则此行亦阙一物矣。然而举率以相减，不害余数之课也。若消去头位则下去一物之实。如是直令左、右行相减，审其正负，则可得而知。先令右行上禾乘中行，为齐同之意。为齐同者，谓中行上禾亦乘右行也。从简易虽不言齐同，以齐同之意观之，其义然矣。”

刘徽注“为术之意，令少行减多行，反覆相减，则头位必先尽。上无一位则此行亦阙一物矣”是说，“直除”的意义是，以首项系数较大的方程减去首项系数较小的方程，如一次减不尽，可

① 郭书春．汇校《九章算术》．沈阳：辽宁教育出版社，1990，403

作几度相减，必能使被减方程的首项系数为零。即“头位必先尽”。被减方程首项系数为零后，则减后之新方程必然缺少一项，而其总实（即下实，或常数项）也缺少一物之数量，即“上无一位则此行亦阙一物矣”。

刘徽注“举率以相减，不害余数之课也”是说，两方程对应相减，并不破坏新方程与原方程的同解性。这就是“直除法”的理论基础，也就是方程两边加、减同一数，则新方程与原方程同解。此即相当于刘徽提出的同解第一定理。

刘徽注“若消去头位则下去一物之实。如是直令左、右行相减，审其正负，则可得而知”。意即若消去头位，则下实也消去一物之实。如此则直接使两方程相减，便可知道各项之正、负。

刘徽注“先令右行上禾乘中行，为齐同之意。为齐同者，谓中行上禾亦乘右行也。从简易虽不言齐同，以齐同之意观之，其义然矣”。方田章合分术下刘徽注称：“凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同”。刘徽一方面给予“齐同”的定义，一方面又推广了“齐同”的意义，并应用于“方程术”中。在这里，刘徽认为：欲消去整系数方程首项时，须以一方程首项系数乘另一方程，两方程首项系数相乘则称为“同”；一方程首项系数乘另一方程其他个项则称为“齐”。所以刘徽认为“右行上禾乘中行”，即是“齐同”的意思。如《张邱建算经》卷下第12问李淳风注称：“以右行上锦遍乘中行者，欲为同齐而去中行上锦。同齐者谓：同行首，齐诸下，而以直减中行。术从简易，虽不为同齐，以同齐之意观之，其宜然矣”。可见，以右行上禾（即首项系数）乘中行各项，具有齐同的意义。如《九章算术》方程术图示、《张邱建算经》卷下第12问图示：

	左行	中行	右行
上禾	1	2×3	3
中禾	2	3×3	2
下禾	3	1×3	1
实	26	34×3	39

《九章算术》图示

	左行	中行	右行
上锦	1	2	3
中锦	2	3	2
下锦	3	1	1
直绢	35	43	45

	左行	中行	右行
上锦	1	2×3	3
中锦	2	3×3	2
下锦	3	1×3	1
直绢	35	43×3	45

《张邱建算经》图示

刘徽注“为齐同者，谓中行上禾亦乘右行也。从简易虽不言齐同，以齐同之意观之，其义然矣”。由上述可知，以右行上禾秉数遍乘中行各项，是齐同之意；以中行上禾秉数遍乘右行，也应是齐同之意。虽然术文中没有明说是齐同，但由齐同之意观点来看，实为齐同。

若右行上禾秉数为整数，中行上禾秉数是分数，虽以右行上禾秉数遍乘中行各项，连续相减，则未必能消去中行头位。可能刘徽有鉴于此，乃提出“为齐同者，谓中行上禾亦乘右行也”。既然说明右行上禾遍乘中行，为齐同之意；又可说明中行上禾遍乘右行，则也是齐同的意义。从而创造了中、右两行互乘对减之术，则中行头位必可去。

戴震校本《九章算术》为“为齐同者，谓中行上禾亦乘右行也。”不误。杨辉《详解九章算法》、大典本、殿本都讹作“为齐同者，谓中行直减右行也”。由于“中行直减右行”，只是“直减”，并非齐同；所以“为齐同者，谓中行直减右行也”一语，于意欠通。同时，这段刘徽注既是注释术文“以右行上禾遍乘中行而以直除”，必然是注解“遍乘”，认为“遍乘”是符合“齐同”意义的，于是引深说“谓中行上禾亦乘右行也”。如以为这段刘徽注原意是注解“直除”的话，注文应是“以右行直减中行”，而不应是“以中行直减右行”。因为“以中行直减右行”，与传统数学术语不合；通览这段刘徽注上下文，不难发现刘徽是在注解“遍

乘”，而不是注解“直减”的。所以，可知戴校本所载不误。

有人以为：“方程章方程术直除法刘徽注大典本（杨辉本同）原文‘为齐同者谓中行直减右行也’，准确地反映了‘直除’的意义和直除法中的齐同原理。戴震不了解我国方程术发展历史过程：……，他以清朝流行的互乘相消法修改不误的原文，改为‘为齐同者谓中行上禾亦乘右行也’，背离了刘徽注原意。钱宝琮指出了戴震的错误，恢复了原文。……，而在钱宝琮纠正了戴震的臆改之后，80年代出版的白注本又恢复戴震错校，是十分不应该的”[①]。这种说法，既没有说明刘徽注主要是注解“直除”，也没有说明刘徽注主要是注解“遍乘”；只说戴震“以清朝流行的互乘相消法修改不误的原文，改为‘为齐同者谓中行上禾亦乘右行也’，背离了刘徽注原意”，这种批评显然是轻率的。

又有人认为：“‘为齐同者，谓中行直减右行也’，杨辉本、《大典》本皆同，原本不误。戴震校改为‘谓中行上禾亦乘右行也’，舛失原义。按：‘直’，抵、相当。……，‘直减’，使其数相当而减也。‘中行直减右行’，即中行减去右行的适当倍数，使其头位相抵消。戴震不解‘直除’之意，改作‘中行上禾亦乘右行’，徒使演算增繁，误也。”[②]这种见解，也值得商榷；因刘徽注在此句之前说“先令右行上禾乘中行，为齐同之意。”在此句之后说“从简易虽不言齐同，以齐同之意观之，其义然矣”。由这段刘徽注来看，刘徽主要是说明“齐同”之意，并非说明“直减”或“直除”的意念，这种曲解刘徽的原意，生硬地评论，使人无法信服。况且“直减”或“直除”与“齐同术”又无直接关联，而“为齐同者，谓中行直减右行也”如何“以齐同之意观之，其义然矣”？是戴震不解“直除”之意？还是持此说者不解“齐同”之

① 郭书春．汇校《九章算术》．沈阳：辽宁教育出版社，1990，403

② 李继闵．《九章算术》校证．西安：陕西科学技术出版社，1993，441

意？

术文“又乘其次，亦以直除”下刘徽注为“复去左行首”；术文“然以中行中禾不尽者，遍乘左行而以直除”下，刘徽注为：“亦令两行相去行之中禾也”。如图所示，当消去中行头位后，以右行上禾秉数乘左行，连续相减，则“复去左行首”，即消去左行的头位：

	左	中	右
上	1×3		3
中	2×3	5	2
下	3×3	1	1
实	26×3	24	39

即

	左	中	右
上	3		3
中	6	5	2
下	9	1	1
实	78	24	39

	左	中	右
上			3
中	4	5	2
下	8	1	1
实	39	24	39

然后，再以中行中禾秉数乘左行各项，连续相减，则消去左行中位中禾。即“亦令两行相去行之中禾也”。如图示：

	左	中	右
上			3
中	4×5	5	2
下	8×5	1	1
实	78×5	24	39

	左	中	右
上			3
中	20	5	2
下	40	1	1
实	195	24	39

	左	中	右
上			3
中		5	2
下	36	1	1
实	99	24	39

术文“左方下禾不尽者，上为法，下为实。实即下禾之实”下，刘徽注为“上、中禾皆去，故余数是下禾实，非但一秉。欲约众秉之实，当以禾秉数为法。列此，以下禾之秉数乘两行，以直除，则下禾之位自去矣。各以其余一位之秉除其下实，即斗数矣。用算繁而不省，所以别为法，约也。然犹不如自用其旧，广异法也。”这就是说，当左行上、中禾都已消去，而下禾秉数不尽时，上余 36 称为“法”，下余 99 称为“实”。即 99 是下禾 36 秉之实，或称为共实，但非下禾 1 秉之实。欲求下禾 1 秉之实，应以“法”除“实”，即“欲约众秉之实，当以禾秉数为法”。下禾 1 秉

之实即是：

$$z=(99/36)\text{斗}=(2+3/4)\text{斗}。$$

至此，若欲求推求中、上禾之一秉斗数，仍可使用“直除法”，即是以遍乘、直减消去各行下禾后，仿上法可求得中、上禾的一秉斗数。如果这样作，若于算较繁，则可采用其他解法。所列“方程”若于算较简无妨仍用“直除法”。

术文“求中禾，以法乘中行下实，而除下禾之实”下，刘徽注为“此谓中、下两禾实。下禾一秉实数先见，将于中行求中禾，先列实以减下实。而左方下禾一秉之实以法为母，于率不通。故先以法乘其实而同之，俱令法为母，而除下禾实。以下禾先见之实，令乘下禾秉数，即得下禾一位之列实。减于下实，则其数是中禾之实也。”在最后一幅图示中，中行下实 24 是中禾 5 秉及下禾 1 秉的两禾共实，但由左行易于求得下禾 1 秉之斗数，今欲于中行求中禾 1 秉之斗数，需于中行下实减去下禾的 1 秉斗数，但左行中，下禾秉数为 36，下实为 99，是以 36 为分母，即下禾 1 秉之实为 99/36，而中行下实为 24，并非以 36 为分母，两数不便直接相减，故称“于率不通”。所以需改变算法，因左行下禾以法 36 为分母，而中行下实不是以 36 为分母，于是，以 36 乘中行下实 24，得 $24\times 36=864$，减去左行下实 99，得

$$24\times 36-99=864-99=765,$$

此即中禾一位之实。也就是“以下禾先见之实（99）令乘（中行）下禾秉数（1），即得下禾一位之列实（1×99）。减于下实（24×36），则其数是中禾之实也”。即 765.

杨辉《详解九章算法》以及大典本皆讹作“故先以法乘其通而同之”。显然于理不合。而钱宝琮校本则改为“故先以法乘中行而同之”。刘徽注若是乘“中行”，必然得：

	左	中	中
上			3
中		5×36	2
下	36	1×36	1
实	99	24×36	39

若欲求中禾之实，乃得［24×36－99］/180，即需以180除。但下文“实皆如法”之“法”是指36，非指180。若以180除，所得是中禾一秉之实，非是中禾一位之实。又因术文“求中禾，以法乘中行下实”。下文“求上禾，亦以法乘右行下实”。可见求中禾、求上禾都是以法乘“下实”。戴震校本改刘徽注为“故先以法乘其实而同之”，不误。今从之。

有人以为刘徽注“此谓中、下两禾实”之“下”字，是四库本所补，没有必要，并说：“大典本、杨辉本此之‘中’字谓中行，不误。聚珍版、四库本于‘中’下补‘下’字，其后诸本均补，无必要”。如以为“中”字是“中行”或“中方”的省语，并无根据，遍查《九章算术》刘徽注，刘徽从未使用“中”之一字表示“中行”或“中方”的例证，况且，在此句刘徽注之前术文为“求中禾”，以法乘中行下实，而除下禾之实”，已说明是“中行下实”，刘徽没有必要再用“中”字表示“中行”或“中方”，刘徽所说“此谓”是指“下实”，并不是指“中行”，同时“此谓中、下两禾实”，语句也欠通畅。可见，理解刘徽注之“中”字为“中行”或“中方”的省语是站不住脚的。

持此说者又说：“大典本、杨辉本原文‘其通而同之’系汉、魏关于齐同术的术语，不误。戴震误于‘通’字下句逗，遂以为不可通，在聚珍版、四库本及屈曾发刻本、孔继涵刻本中改‘通’作‘实’。宋校本依此误改。钱宝琮校本认为戴震将‘其通’改作‘其实’亦不甚合理，而改作‘中行’，不妥。白注本又

恢复戴震错校"[①]。在《九章算术》及刘徽、李淳风注文中，虽把"齐"、"同"、"通"视为齐同术的关键术语，但"其通"是视为"共同分母"的意思，因左行下实是以"法"36为分母，而中行下实是以24为分母，并不是以36为分母，所以理解刘徽注为"先以法乘其通而同之"，显然于理不合。钱宝琮校本改刘徽注为"先以法乘中行而同之"，如前所说，也与理不合。

还有人以为："'故先以法乘，其通而同之'为杨辉本、《大典》本原文，不误。戴震改'通'为'实'与上连读；钱宝琮又将'其实'改为'中行'，皆为不妥。按：'通而同之'为古算用语。意谓对比率施以齐同变换而达到彼此相通。此处乃指'下禾以法为母'，其余上、中禾与此不同，便不能相并相消，故须'通而同之'。注文中'其'，若'乃'。原意可通。"[②]事实上，在此处之"其"，只能视为代名词，不能训为"乃"。虽然"其"是一多义词，但是这里只能释为代名词，因为其前句是"故先以法乘"，其中"乘"是动词，在"乘"字下必须有一受词，若逗点于"乘"字下，这种无受词的断句法，是值得商榷的。若理解刘徽注是一句省语，认为是先以法数36乘"中行"，则犯了钱宝琮校本的错误；若认为刘徽注是先以法数36乘"公分母"，即"通"，则又形成了循环论证。又因其前句刘徽注为："将于中行求中禾，先列实以减下实。而左方下禾一秉之实以法为母，于率不通"。其中主要说明"于率不通"，所以必须以"法"乘其下实，既不能乘其"中行"，也不能乘其"通而同之"。由此可见，这种断句法，有可能误解原意。总之，戴震校改为"故先以法乘其实而同之"，是十分正确的。

在术文"余如中禾秉数而一，即中禾之实"下，刘徽注为

① 郭书春．汇校《九章算术》．沈阳：辽宁教育出版社，1990，405

② 李继闵：《九章算术》校证．西安：陕西科学出版社，1993，443

"余中禾一位之实也。故以一位秉数约之，乃得一秉之实也。"如同前注所说，中行下实 24 乘以法数 36，并减去左行下实 99 之后，应除以中行中禾秉数 5，即得

$$(24\times36-99)\div5=153。$$

即是"中禾之实"，此"实"并非中禾一秉之实，而是中禾一位之实。若推求中禾一秉之实，需以法数 36 除，即 $153\div36=(4+1/4)$ 斗。也即

$$[(24\times36-99)\div5]\div36=(4+1/4)(斗)。$$

术文"求上禾亦以法乘右行下实，而除下禾、中禾之实"下，刘徽注为："此右行三禾共实。今中、下禾之实其数并见，令乘右行之禾秉以减之，故亦如前，各求列实以减下实也。"如前所述，若推求上禾，亦应以法数 36 乘右行下实 39，即得 39×36，减去下禾、中禾之实，得

$$39\times36-2[(24\times36-99)\div5]\div36-(99\times1)\div1=999,$$

即是右行下实乃上、中、下禾之共实，现已知下禾、中禾之实，以下禾、中禾之实分别乘右行下禾、中禾之秉数，由右行共实减去此数，即得 999，此即求得"上禾之实"。也即刘徽注所述"各求列实以减下实也。"

在刘徽注"此右行三禾共实"之前，杨辉本、大典本俱衍"此右行三禾共实令三位之实故以一位乘数约之乃得一秉之实"26 字，钱宝琮校本以意校删此 26 字，今从钱宝琮校本。有人认为此 26 字不当删，于刘徽注"此右行三禾共实"前，添置此 26 字，并断句为："此右行三禾共实，令三位之实，故以一位秉数约之，乃得一秉之实"。还说："钱宝琮校本认为，'此右行三禾'至'一秉之实'凡二十六字系衍文，删去。又，'秉数'之'秉'字，钱宝琮校本引作'乘'，知钱宝琮校本所据殿本，当是广雅本。"[1] 持此

---

[1] 郭书春. 汇校《九章算术》. 沈阳：辽宁教育出版社，1990，405

说者，其所以胡乱添置此26字，既不了解传抄者重抄之误，又未体会钱宝琮校本用心之苦。

术文“余如上禾秉数而一，即上禾之实。实皆如法，各得一斗”下，刘徽注为：“三实同用。不满法者，以法命之。母、实皆当约之”。在上文中，求得“上禾之实”为999，当除以右行上禾之秉数3，即得999÷3＝333，即上禾一位之实。先后求得下禾、中禾、上禾一位之实分别为99、153、333，都除以法数36，则各得：

99÷36＝(2＋3/4)(斗)，　153÷36＝(4＋1/4)(斗)，
333÷36＝(9＋1/4)(斗)。

由以上所述，可知刘徽对“方程”术理论的贡献是十分巨大的，不但对于“方程的”定义、原理给予深刻而明确的论述，而且对于“方程”的直除法、同解性还给以一般的描述，并提高到“齐”、“同”、“通”的观点，加以说明；在古代，像刘徽这样的数学家，对“方程”的义、理能有如此杰出的贡献，是难能可贵的，是一项突出性的成就。

第二节　刘徽对“方程”运算的创新

方程章第2问为：

(2) 今有上禾七秉，损实一斗，益之下禾二秉，而实一十斗。下禾八秉，益实一斗与上禾二秉，而实一十斗。问：上、下禾实一秉各几何？

答曰：上禾一秉实一斗五十二分斗之一十八；
　　　下禾一秉实五十二分斗之四十一。

术曰：如方程。损之曰益，益之曰损。损实一斗者，其实过一十斗也。益实一斗者，其实不满一十斗也。

术文之下，刘徽注称：

“问者之辞，虽以损益为说，今按实云上禾七秉、下禾二秉，实一十一斗；上禾二秉、下禾八秉，实九斗也。‘损之曰益’，言损一斗余当一十斗。今欲全其实，当加所损也。‘益之曰损”，言益实一斗乃满一十斗。今欲知本实，当减所加即得也。”

刘徽又称：“重论损益数者，各以损益之数损益之也。”

术文所说“如方程”，即是按照题意布列“方程”，也即：

	左行	右行
上禾	2秉	7秉−1斗
下禾	8秉+1斗	2秉
实	10斗	10斗

或

	左行	右行
上禾	2秉	7秉
下禾	8秉	2秉
实	9斗	11斗

术文说：“损之曰益，益之曰损”。相当于现今方程理论中的移项法则；即是移负得正，移正得负。今以第2问为例说明如下：

设上禾1秉其实为x斗，下禾1秉其实为y斗，依题意得：

$$(7x-1)+2y=10,$$

$$2x+(8y+1)=10。$$

按术文“损实一斗者，其过实一十斗也。益实一斗者，其实不满一十斗也”。即

$$7x+2y=10+1, \quad \text{或} \quad 7x+2y=11,$$

$$2x+8y=10-1。\quad\quad 2x+8y=9。$$

若损实1斗，其实为10斗；若不损1斗，其实应为11斗；即“损之曰益”。若益1斗，其实为10斗；若不益1斗，其实应为9斗；即“益之曰损”。若为了使其实得到全数，当加上所损之数；若为了知道其实之原数，当减去所加之数。即刘徽注“言损一斗，余当一十斗。今欲全其实，当加所损也。”“言益一斗，乃满一十斗，今欲知本实，当减所加即得也。”

刘徽注说：“重论损益数者，各以损益之数损益之也。”即是说，重复论述损益之数者，则各以损益之数损益之；也即单一论

述者，当以“损之曰益”或“益之曰损”处理，即“移正得负”或“移负得正”；重复论述者，即以“移正得负、移负得正”或“移负得正、移正得负”处理；即两次论述者，当移正得正，移负得负。

方程章第3、4、5、6问分别为：

(3) 今有上禾二秉，中禾三秉，下禾四秉，实皆不满斗。上取中、中取下、下取上各一秉而满斗。问：上、中、下禾实一秉各几何？

答曰：上禾一秉实二十五分斗之九；

中禾一秉实二十五分斗之七；

下禾一秉实二十五分斗之四。

术曰：如方程，各置所取，以正负术入之。

术下刘徽注称：

“置上禾二秉为右行之上，中禾三秉为中行之中，下禾四秉为左行之下，所取一秉及实一斗各从其位。诸行相取之物，皆依此例。”

(4) 今有上禾五秉，损实一斗一升，当下禾七秉。上禾七秉，损实二斗五升，当下禾五秉。问：上、下禾实一秉各几何？

答曰：上禾一秉五升；

下禾一秉二升。

术曰：如方程，置上禾五秉正，下禾七秉负，损实一斗一升正。

次置上禾七秉正，下禾五秉负，损实二斗五升正。以正负术入之。

术文下刘徽注称：

“言上禾五秉之实多，减其一斗一升，余，是与下禾七秉相当数也。故互其算，令相折除，以一斗一升为差。为差者上禾之余实也。”“接正负之术，本设列行物程之数不限多少，必令与实上、下相次，而以每行各自为率。然而或减或益，同行异位殊为二品，

各自并减之差见于下也。”

(5) 今有上禾六秉，损实一斗八升，当下禾一十秉。下禾十五秉，损实五升，当上禾五秉。问：上、下禾实一秉各几何？

答曰：上禾一秉实八升；

下禾一秉实三升。

术曰：如方程，置上禾六秉正，下禾一十秉负，损实一斗八升正。次置上禾五秉负，下禾一十五秉正，损实五升正。以正负术入之。

术文之下，刘徽注称：

“言上禾六秉之实多，减损其一斗八升，余是与下禾十秉相当之数。故亦互其算，而以一斗八升为差实。差实者上禾之余实。”

(6) 今有上禾三秉，益实六斗，当下禾十秉。下禾五秉，益实一斗，当上禾二秉。问：上、下禾实一秉各几何？

答曰：上禾一秉实八斗。

下禾一秉实三斗。

术曰：如方程，置上禾三秉正，下禾一十秉负，益实六斗负。次置上禾二秉负，下禾五秉正，益实一斗负。以正负术入之。

术文下刘徽注称：

“言上禾三秉之实少，益其六斗，然后与下禾十秉相当也。故亦互其算，而以六斗为差实。差实者，下禾之余实。”

术文所说“如方程”，即是按照题意布列方程，其第3、4、5、6问分别为：

	左	中	右
上禾	1		2
中禾		3	1
下禾	4	1	
实	1	1	1

将“上禾二秉，中禾三秉，下禾四秉”各置一行，分别加中

禾、下禾、上禾1秉；又设上禾、中禾、下禾1秉之实为x、y、z，得：

$$2x+y=1,$$
$$3y+z=1,$$
$$x+4z=1。$$

	左	右
上禾	7秉−25升	5秉−11升
下禾		
实	5秉（下禾实）	7秉（下禾实）

即

	左	右
上禾	+7秉	+5秉
下禾	−5秉	−7秉
实	+25升	+11升

若设上禾、下禾1秉之实分别为x、y，按题意即得：

$$5x-11=7y,$$
$$7x-25=5y。$$

移项变号则得：

$$5x-7y=11,$$
$$7x-5y=25。$$

	左	右
上禾		6秉−18升
下禾	15秉−5升	
实	5秉（上禾实）	10秉（下禾实）

即

	左	右
上禾	−5秉	+6秉
下禾	+15秉	−10秉
实	+5升	+18升

若设上禾、下禾1秉之实分别为x、y，按题意即得：

$$6x-18=10y,$$
$$15y-5=5x。$$

移项变号则得：

$$6x-10y=18,$$
$$-5x+15y=5。$$

	左	右
上禾		3 秉+6 升
下禾	5 秉+1 斗	
实	2 秉（上禾实）	10 秉（下禾实）

即

	左	右
上禾	−2 秉	+3 秉
下禾	+5 秉	−10 秉
实	−1 斗	−6 斗

若设上禾、下禾 1 秉之实分别为 x、y，按题意即得：

$$3x+6=10y,$$
$$5y+1=2x。$$

移项变号则得：

$$3x-10y=-6,$$
$$-2x+5y=-1。$$

在术文"损之曰益，益之曰损"的基础上，刘徽进一步推广至"互其算，令相折除"的境界，刘徽注"互其算"即是令两数互相对换，"相折除"即是使两数相折合抵消；以现今术语来说，"互其算"、"相折除"即是移项变号，如第 4、5、6 问刘徽注说："故互其算，令相折除，以一斗一升为差。为差者上禾之余实也。""故亦互其算，而以一斗八升为差实。差实者上禾之余实。""故亦互其算，而以六斗为差实，差实者，下禾之余实。"就是第 4 问注说"言上禾五秉之实多，减其一斗一升，余是与下禾七秉相当数也。"即是化 $5x-11=7y$ 为 $5x-7y=11$，其中 11 即是上禾之余实。第 5 问注说"言上禾六秉之实多，减损其一斗八升余是与下禾十秉相当之数。"即化 $6x-18=10y$ 为 $6x-10y=18$，其中 18 即是上禾之余实。第 6 问注说"言上禾三秉之实少，益其六斗，然后与下禾十秉相当也。"即化 $3x+6=10y$ 为 $3x-10y=-6$，其中 6 即是下禾之余实。

由以上几问看出，刘徽不但把"损之曰益，益之曰损"推至"重论损益数者，各以损益之数损益之也"，还推广至"故其算"、"相折除"的算法。

第三节　刘徽对"方程"解法的创新

方程章第 7 问为：

(7) 今有牛五、羊二，直金十两。牛二、羊五，直金八两。问：牛、羊各直金几何？

答曰：牛一，直金一两二十一分两之一十三；

　　羊一，直金二十一分两之二十。

术曰：如方程。

在术文之下，刘徽注称：

"假令为齐同，头位为牛，当相乘左右行定。更置右行，牛十、羊四、直金二十两；牛十、羊二十五、直金四十两。牛数等同，金多二十两者，羊差二十一使之然也。以少行减多行，则牛数尽，惟羊与直金之数见，可得而知也。以小推大，虽四、五行不异也。"

按术即得方程为：

	左	右
牛	2	5
羊	5	2
直金	8	10

若设牛、羊 1 头直金各为 x、y 两，按术得：

$$5x+2y=10,$$

$$2x+5y=8。$$

按刘徽注文，上述方程可变形为：

	左	右
牛	2×5	5×2
羊	5×5	2×2
直金	8×5	10×2

即

	左	右
牛	10	10
羊	25	4
直金	40	20

左行减右行

	左	右
牛		10
羊	21	4
直金	20	20

以左行“羊数”21为法，“直金”20为实，故得羊一“直金二十一分两之二十”，即（20/21）两。既得羊价，或用“直除法”，或用互乘对减法，易于求得牛价为（1＋13/21）两。这种运算，就是刘徽所创造的“互乘对减”法，这种算法，不但起到事半功倍的作用，而且可以推广，如刘徽注说“以小推大，虽四、五行不异也。”这一算法，现今称为“加减消元法”。

方程章第8，9问为：

（8）今有卖牛二、羊五，以买十三豕，有余钱一千。卖牛三、豕三，以买九羊，钱适足。卖羊六、豕八，以买五牛，钱不足六百。问：牛、羊、豕价各几何？

答曰：牛价一千二百；

羊价五百；

豕价三百。

术曰：如方程，置牛二、羊五正，豕一十三负，余钱数正；次牛三正，羊九负，豕三正；次牛五负，羊六正，豕八正，不足钱负。以正负术入之。

在术文之下，刘徽注称：

“此中行买卖相折，钱适足，但互买卖算而已，故下无钱直也。设欲以此行如方程法，先令牛二遍乘中行，而以右行直除之，是终于下实虚缺矣。故注曰：正无实负，负无实正，方为类也。方将以别实加适足之数，与实物作实。”

按术即得方程为：

	左	中	右
牛	－5	3	2
羊	6	－9	5
豕	8	3	－13
实	－600		1000

按术，以右行头位遍乘中行，得：

	左	中	右
牛	－5	3×2	2
羊	6	－9×2	5
豕	8	3×2	－13
实	－600		1000

即

	左	中	右
牛	−5	6	2
羊	6	−18	5
豕	8	6	−13
实	−600		1000

由中行累减右行，使中行头位为零，得：

	左	中	右
牛	−5		2
羊	6	−33	5
豕	8	45	−13
实	−600	−3000	1000

按照现今形式，设x、y、z分别为牛、羊、豕价，按术则有：

$$2x+5y-13z=1000, \qquad (1)$$

$$3x-9y+3z=0, \qquad (2)$$

$$-5x+6y+8z=-600。 \qquad (3)$$

以2遍乘(2)式各项，即“令牛二遍乘中行”，得：

$$6x-18y+6z=0。 \qquad (4)$$

由(4)式累减(1)式，即“以右行直除之”，得：

$$-33y+45z=-3000。 \qquad (5)$$

由(4)式累减(1)式，右边不敷减，即“终于下实虚缺矣”。再按“正负术”，则得(5)式右边为−3000。根据刘徽注文，此问之运算，至此为止；以下的计算步骤，既可使用“直除法”，也可使用“互乘对减法”。

在传本《九章算术》中，刘徽注“方将以别实加适足之数，与实物作实”之下，都有“盈不足章黄金白银与此相当。假令黄金九、白银十一，称之重适等。交易其一，金轻十三两。问金、银一枚各重几何？与此同。”因为此处这48字与本问并无十分明显的关联，有人怀疑是传抄之误，1988年，在美国圣迭戈中国科学史第五届国际会议上，曾宣布这一看法，并称“按以上分析，这段注文当置于方程章第9问五雀六燕之后，但传本《九章算术》却置于第8问后。因此，可能传抄者误抄于第8问之末”①

① 白尚恕.《九章算术》的新研究，《刘徽研究》. 西安：陕西人民教育出版社、台北：九章出版社，1993. 334～350

方程章第 9 问为：

(9) 今有五雀、六燕，集称之衡，雀俱重，燕俱轻。一雀一燕交而处，衡适平。并燕、雀重一斤。问：燕、雀一枚各重几何？

答曰：雀重一两一十九分两之十三；

燕重一两一十九分两之五。

术曰：如方程，交易质之，各重八两。

如前所述，传本《九章算术》方程章第 8 问刘徽注末之 48 字，可能传抄者误置，笔者校移此 48 字于经文“一雀一燕交而处，衡适平”之后，即刘徽注称：“盈不足章黄金白银与此相当。假令黄金九、白银十一，称之重适等。交易其一，金轻十三两。问金、银一枚各重几何。与此同。”

传本《九章算术》术文之后，刘徽注称：“此四雀一燕与一雀五燕衡适平。并重一斤，故各八两。列两行程数。左行头位其数有一者，令右行遍除，亦可令于左行而取其法实于右。左行数多，以右行取其数。左头位减尽，中下行算当燕与实，右行不动。左上空，中法下实即每枚当重，宜可知也。按此四雀一燕与一雀五燕其重等，是三雀四燕重相当，雀率重四，燕率重三也。诸再程之率皆可异术求之，即其数也。”

按术文则得方程为：

	左	右
雀	1	4
燕	5	1
重	8	8

按刘徽注所说，左行头位为 1，可由右行累减左行，为了避免出现负数，也可以右行头位遍乘左行，而以直除。

	左	右
雀	4	4
燕	20	1
重	32	8

即得

	左	右
雀		4
燕	19	1
重	24	8

表示以现代形式，设 x、y 分别为1雀、1燕的重量，乃得

$$4x+y=8,\quad 4x+y=8,\quad 4x+y=8,$$
$$x+5y=8。\quad 4x+20y=32。\quad 19y=24。$$

因为“左上空，中法、下实即每枚当重，宜可知也。”故得 $y=24/19=1+5/19$。仿此，得 $x=1+13/19$。

由于 x、y 分别是1雀、1燕的重量，按注乃有

$$4x+y=x+5y,$$

移项得　$3x=4y$，　或　$x:y=4:3$。

即是“三雀四燕重相当，雀率重四，燕率重三也。”算至此，则可用“衰分术”计算，或按刘徽所创造的“异术”求之，便可求得雀、燕的重量。

方程章第13问，是一道最早的不定方程问题，此问为：

(13) 今有五家共井，甲二绠不足，如乙一绠；乙三绠不足，如丙一绠；丙四绠不足，如丁一绠；丁五绠不足，如戊一绠；戊六绠不足，如甲一绠。如各得所不足一绠，皆逮。问：井深、绠长各几何？

答曰：井深七丈二尺一寸。

甲绠长二丈六尺五寸；

乙绠长一丈九尺一寸；

丙绠长一丈四尺八寸；

丁绠长一丈二尺九寸；

戊绠长七尺六寸。

术曰：如方程，以正负术入之。

术文之下，刘徽注称：

“此率初如方程之，名各一逮井。其后，法得七百二十一，实七十六，是为七百二十一绠而七十六逮井。而戊一绠逮井之数定，逮七百二十一分之七十六。是故七百二十一为井深，七十六为戊绠之长，举率以言之。”

根据题意，得方程为：

	左	四	三	二	右
甲	1				2
乙				3	1
丙			4	1	
丁		5	1		
戊	6	1			
深	721	721	721	721	721

或者，设 x、y、z、u、v 各为甲、乙、丙、丁、戊绠长之比率，又取井深比率为 w，得：

$$2x+y=w,$$
$$3y+z=w,$$
$$4z+u=w,$$
$$5u+v=w,$$
$$6v+x=w。$$

按术解之，即得 $x:w=265:721$，$y:w=191:721$，$z:w=148:721$，$u:w=129:721$，$v:w=76:721$。

由于《九章算术》并未给予井深单位，答案却以丈、尺、寸表示，其实答案应是 $x:y:z:u:v:w=256:191:148:129:76:721$，即各家绠长与井深之比率。故刘徽注称：“七百二十一为井深，七十六为戊绠之长，举率以言之。”依此足证，刘徽已充分认识到此问是一不定方程。

通过以上所论，可知刘徽在“方程”解法理论方面的各种改革与创新。他根据解法理论，不但创造了“对乘互减”法，从而

提高了解题效率，而且改变了“直除法”的单一计算技巧；另一方面，《九章算术》利用“正负术”，突破了“方程”各项只列非负值的限制，而刘徽却给予正确的解释；在方程章第9问之后，刘徽还对“一雀一燕交而处，衡适平”作出前后联想的说明，从而使用“比率”对方程提出新的解法；对于“五家共井”一问，刘徽首先鉴别出是一不定方程问题；所有这些说法，都是刘徽对“方程”理论的创新之作。

第四节　刘徽“方程新术”与其他各术之间的关系

《九章算术》方程章第18问为：

(18) 今有麻九斗、麦七斗、菽三斗、荅二斗、黍五斗，直钱一百四十；麻七斗、麦六斗、菽四斗、荅五斗、黍三斗，直钱一百二十八；麻三斗、麦五斗、菽七斗、荅六斗、黍四斗，直钱一百一十六；麻二斗、麦五斗、菽三斗、荅九斗、黍四斗，直钱一百一十二；麻一斗、麦三斗、菽二斗、荅八斗、黍五斗，直钱九十五。问：一斗直几何？

答曰：麻一斗七钱，

麦一斗四钱，

菽一斗三钱，

荅一斗五钱，

黍一斗六钱。

术曰：如方程，以正负术入之。

术文之下，刘徽注称：

“此‘麻麦’与均输、少广章之重衰、积分，皆为大事。其拙于精理徒按本术者，或用算而布毯，方好烦而喜误，曾不知其非，反欲以多为贵。故其算也，莫不暗于设通而专于一端。至于此类，

苟务其成，然或失之，不可谓要约。更有异术者，庖丁解牛，游刃理间，故能历久其刃如新。夫数犹刃也，易简用之，则动中庖丁之理。故能和神爱刃，速而寡尤。凡《九章算术》为大事，按法皆不尽一百算也。虽布算不多，然足以算多。世人多以方程为难，或尽布算之象，在缀正负而已。未暇以论其设动无方，斯胶柱调瑟之类。聊复恢演为作新术，著之于此，将亦启导疑意，网罗道精，岂传之空言，记其施用之例，著策之数，每举一隅焉。”

在此之后，刘徽给予“方程新术”，其文为：

“方程新术曰：以正负术入之。令左右相减，先去下实，又转去物位，求其一行二物正负相借者，易其相当之率。又令二物与他行互相去取，转其二物相借之数，即皆相当之率也。各据二物相当之率，对易其数，即各当之率也。更置减行及其下实，各以其物本率今有之，求其所同，并以为法其当相并而行中正负杂者，同名相从，异名相消，余以为法。以下实为实。实如法，即合所问也。一物各以本率今有之，即皆合问也。率不通者齐之。其一术曰：置群物通率为列衰，更置减行群物之数，各以其率乘之，并以为法。其当相并而行中正负杂者，同名相从，异名相消，余为法。以减行下实乘列衰，各自为实。实如法而一，即得。以旧术为之，凡应置五行。今欲要约。先置第四行，以减第三行。反减第四行，去其头位。次置第二行，以第三行减第二行，去其头位。次置右行及左行，去其头位。次以第二行减右行。次以右行去左行及第二行头位。又去第四行头位，余，可半。次以第四行减左行。次以左行去第四行及第二行头位。次以第二行去第四行头位。余，约之为法、实，如法而一得六，即黍价。以法减第二行得荅价，左行得菽价，右行得麦价，第三行得麻价。如此凡用七十七算。以新术为此：先以第四行减第三行。次以第三行去右行及第二行、第四行下位。又以减左行下位，不足减乃止，次以左行减第三行下位，不足减乃止。次以第三行去左行下位。讫，废去第

三行。次以第四行去左行下位。又以减右行头位。次以右行去第二行及第四行下位。次以第二行减第四行及左行头位，不足减乃止。次以第四行减左行菽位，不足减乃止。次以左行减第二行头位，余可再半。次以第四行去左行及第二行头位。次以第二行去左行头位。余约之。上得五，下得三，是菽五当荅三。次以左行去第二行菽位。又以减第四行及右行菽位，不足减乃止。次以右行减第二行头位，不足减，乃止。次以第二行去右行头位。次以左行去右行头位。余，上得六，下得五，是为荅六当黍五。次以左行去右行荅位，余，约之。上为二，下为一。次以右行去第二行下位。以第二行去第四行下位。又以减左行下位，不足减乃止。次左行去第二行下位。余，上得三，下得四，是为麦三当菽四。次以第二行减第四行下位，不足减乃止。次以第四行去第二行下位。余，上得四，下得七，是为麻四当麦七。是为相当之率举矣。据麻四当麦七，即为麻价率七而麦价率四。又麦三当菽四，即为麦价率四而菽价率三。又菽五当荅三，即为菽价率三而荅价率五。又荅六当黍五，即为荅价率五而黍价率六。而率通矣。更置第三行，以第四行减之，余有麻一斗、菽四斗正，荅三斗负，下实四正。求其同为麻之数，以菽率三、荅率五、各乘菽、荅斗数，如麻率七而一，菽得一斗七分斗之五正，荅得二斗七分斗之一负。则菽、荅化为麻并之，令同名相从，异名相消，余为麻七分斗之四，以为法。置下实四为实。以分母乘之，实得二十八，而分子化为法矣。以法除得七，即麻一斗之价。置麦率四、菽率三、荅率五、黍率六，皆以其斗数乘之，各自为实以麻率七为法。所得即同为麻之数。亦可使置本行实与物同通之，各以本率今有之，求其所同。所得并以为法，如此则无正负之异矣，择异同而已。又可以其一术为之。置五行通率，为麻七、麦四、菽三、荅五、黍六，以为列衰。减行麻一斗、菽四斗正、荅三斗负，各以其率乘之，讫。令同名相从，异名相消，余为法。又置下实，乘列衰，所得各为实。

此可以实约法，则不复乘列衰，各以列衰如所约知其价。如此则凡用一百二十四算也。”

在第18问之后，刘徽发表一篇议论，其用意是想告诫读者、数学工作者，凡是进行数学研究或数学教学时，应该开动脑筋、广开思路想些解决办法，以求问题的解决；切不可一成不变、墨守成规地只顾按条件进行计算，应该辨体明宗地进行思考；例如方程的消元法，其变换无穷，如果只是墨守成法，非但无大研究进展，即使如此，则往往会走些弯路，自取不少麻烦。刘徽在这里所列的“方程新术”、“其一术”都是起个表率作用，藉以希望读者、数学工作者多加思考，并经常自我训练。

刘徽所说大意为：此“麻、麦”一问，与少广、均输章的“重衰”、“积分”等术，都是《九章算术》中的大事。凡是不精思其理论而只按照本术计算，或像铺毡子一样地计算，或是喜好烦杂和误谬者，曾不知其不对，反而觉得以多为贵。所以，所有一切算法，没有不是暗中通达而专用于一方面者。至于这类问题，即使计算成功，或者失败，不足成为制约的条件。今有“异术”即“方程新术”或“其一术”者，如同庖丁解牛，游动刀刃于空隙之间，可以经历很久的时间而其刃如新，仍然十分锋利：所谓“数学”，如同刀刃一样，简化使用方法，并按照庖丁之理，则能和神爱刃，其算法既快速而且简单。凡是《九章算术》中的大事，按照法则计算，一般也不过百十次运算。虽然计算步骤不多，但实际上足可计算很多的问题。世人一般多认为“方程”最难，实质上，不过按术布算并缀补正数、负数而已。不必去证其假设、运算是否有方，拘泥于一格是否通变等事。姑且扩大其演算的步骤而创作“新术”，著述在这里，也可启发一些疑意，并可以网罗一些道理，并非传以空言，而是记其使用之例，著策之数，每每只举一隅而已。

刘徽所创之方程新术：按正负术进行计算。在“方程”中，令

左、右行连续相减，先消去其下实即常数项，再消去其他各项，一直求到一行只有两未知项，而且是一正一负时为止，例如求得两未知项的方程为 $4x-7y=0$，然后移项，易为两数相当之率，即 $4x=7y$，再根据两未知数的相当之率，通过加、减运算，求得另外两未知数的相当之率。又分别根据每两未知数的相当之率，相互对易其数，即可求得每两未知数的相当之率；例如第 18 问，即可求得 $x:y=7:4$，$x:z=7:3$，$x:u=7:5$，$x:v=7:6$. 再置减行各项及其下实，分别以各未知数之比率，按今有术进行计算，如减行为

$$x+4z-3u=4,$$

而 x、z、u 之比分别 7、3、5，按今有术计算则得 $4z=4\times(3/7)x$，$-3u=(-3)\times(5/7)x$。然后代入减行，得 $x+4\times(3/7)x-3\times(5/7)x=4$。既然都化成同一未知数，以相加之和作为除数即法，其减行中有正数、有负数，即 $1+4\times(3/7)-3\times(5/7)$，则应该同号两数相加，而异号两数则相减，就是以其余数作为法。即

$$1+4(3/7)-3(5/7)=4/7。$$

以下实作为被除数，被除数除以除数，即得答数。即

$$[1+4(3/7)-3(5/7)]x=4,x=7。$$

仿此，类似地可求得其他各未知数的答数。对于率不通者，可以先行通分，使之相齐。

其一术：置各未知数的连比作为列衰，又置减行各项，分别乘以各未知数的比率，以相加之和作为除数。仍以第 18 问为例，其列衰即 $x:y:z:u:v=7:4:3:5:6$，取减行为 $x+4z-3u=4$，各未知数之系数分别为 1、4、-3，分别乘以其比率并相加，即得 $1\times7+4\times3-3\times5=4$，作为法数。其中有正、有负，按同号二数相加，异号二数则相减，以其余数作为法。以减行下实分别乘各未知数之比率，分别作为被除数。各被除数除以除数，即得答数。即

$x=(4\times7)/4=7$，$y=(4\times3)/4=3$，$u=(4\times5)/4=5$。

若以旧术即直除法计算此问，应该布列为五行，今设麻、麦、菽、荅、黍1斗之价分别为 x、y、z、u、v 钱，依题意得

	左	四	三	二	右
麻	1	2	3	7	9
麦	3	5	5	6	7
菽	2	3	7	4	3
荅	8	9	6	5	2
黍	5	4	4	3	5
实	95	112	116	128	140

或

$$9x+7y+3z+2u+5v=140, \quad (1)$$

$$7x+6y+4z+5u+3v=128, \quad (2)$$

$$3x+5y+7z+6u+4v=116, \quad (3)$$

$$2x+5y+3z+9u+4v=112, \quad (4)$$

$$1x+3y+2z+8u+5v=95。 \quad (5)$$

为了简化计算，先置第四行，由第四行减去第三行。即注文“先置第四行，以减第三行”。

	五	四	六	二	一
麻	1	2	1	7	9
麦	3	5		6	7
菽	2	3	4	4	3
荅	8	9	−3	5	2
黍	5	4		3	5
实	95	112	4	128	140

$(3)-(4)$：$1x+4z-3u=4$。　　(6)

再以减行反减第四行，消去第四行头位。即注文“反减第四行，去其头位”。

	五	七	六	二	一
麻	1		1	7	9
麦	3	5		6	7
菽	2	−5	4	4	3
荅	8	15	−3	5	2
黍	5	4		3	5
实	95	104	4	128	140

$(4)-2(6): 5y-5z+15u+4v=104$。　　(7)

次置第二行，由第二行减去第三行，除去头位。即注文“次置第二行，以第三行减第二行，去其头位”。即

	五	七	六	八	一
麻	1		1		9
麦	3	5		6	7
菽	2	−5	4	−24	3
荅	8	15	−3	26	2
黍	5	4		3	5
实	95	104	4	100	140

$(2)-7(6): 6y-24z+26u+3v=100$。　　(8)

再置右行及左行，由右行、左行分别减去第三行，去其头位。即注文“次置右行及左行，去其头位”。

	十	七	六	八	九
麻			1		
麦	3	5		6	7
菽	−2	−5	4	−24	−33
荅	11	15	−3	26	29
黍	5	4		3	5
实	91	104	4	100	104

$(1)-9(6): 7y-33z+29u+5v=104$。　　(9)

$(5)-(6): 3y-2z+11u+5v=91$。　　(10)

再由右行减去第二行。即注文“次以第二行减右行”。

	十	七	六	八	一一
麻			1		
麦	3	5		6	1
菽	−2	−5	4	−24	−9
荅	11	15	−3	26	3
黍	5	4		3	2
实	91	104	4	100	4

$(9)-(8): y-9z+3u+2v=4$。　　(11)

以左行、第二行分别减去右行，消去其头位。即注文“次以右行去左行及第二行头位”。

	一二	七	六	一三	一一
麻			1		
麦		5			1
菽	25	−5	4	30	−9
荅	2	15	−3	8	3
黍	−1	4		−9	2
实	79	104	4	76	4

$(10)-3(11): 25z+2u-v=79$。　　(12)

$(8)-6(11): 30z+8u-9v=76$。　　(13)

由第四行减去右行，消去其第二位之后，再约分。即注文“又去第四行头位，余，可半”。

	一二	一四	六	一三	一一
麻			1		
麦					1
菽	25	20	4	30	−9
荅	2		−3	8	3
黍	−1	−3		−9	2
实	79	42	4	76	4

(7)−5(11)：$40z-6v=84$ 或 $20z-3v=42$。　(14)

再由左行减去第四行。即注文“次以第四行减左行”。

	一五	一四	六	一三	一一
麻			1		
麦					1
菽	5	20	4	30	−2
荅	2		−3	8	3
黍	2	−3		−9	2
实	37	42	4	76	4

(12)−(14)：$5z+2u+2v=37$。　(15)

由第四、第二行分别减去左行，消去其第三位。即注文“次以左行去第四行及第二行头位”。

	一五	一六	六	一七	一一
麻			1		
麦					1
菽	5		4		−9
荅	2	−8	−3	−4	3
黍	2	−11		−21	2
实	37	−106	4	−146	4

(14)−4(15)：$-8u-11v=-106$。　(16)

(13)－6(15)：$-4u-21v=-146$。 (17)

由第四行减去第二行，消去其第四位。即注文"次以第二行去第四行头位"。

	一五	一八	六	一七	一一
麻			1		
麦					1
菽	5		4		−9
荅	2		−3	−4	3
黍	2	31		−21	2
实	37	186	4	−146	4

(16)－2(17)：$31v=186$。 (18)

以所得之数，约简后分别作为法、实，以法除实即得1斗黍价为6钱。即注文"余，约之为法、实。如法而一得六，即黍价"。

	一五	一九	六	一七	一一
麻			1		
麦					1
菽	5		4		−9
荅	2		−3	−4	3
黍	2	1		−21	2
实	37	6	4	−146	4

由(18)式得：$v=186/31=6$。 (19)

由第二行减第四行，可得荅价。再由左行减去第四行及第二行，可得菽价；由右行减去第四行及第二行，再减左行，可得麦价；由第三行减去第二行及左行各对应数，则可得1斗之麻价。即注文"以第四行减第二行得荅价，左行得菽价，右行得麦价，第三行得麻价"。

	二一	一九	二三	二十	二二
麻			1		
麦					1
菽	1				
荅				1	
黍		1			
实	3	6	7	5	4

(17)+21(19)：$u=5$。　(20)

(15)−[2(19)+2(20)]：$z=3$。　(21)

(11)−[2(19)+3(20)−9(21)]：$y=4$。　(22)

(6)+[3(20)−4(21)]：$x=7$。　(23)

以上共计 77 次运算。如注文所说"如此凡用七十七算"。

今用刘徽新术演算此问：设麻、麦、菽、荅、黍 1 斗之价分别为 x、y、z、u、v 钱，依题意布列方程为：

	左	四	三	二	右
麻	1	2	3	7	9
麦	3	5	5	6	7
菽	2	3	7	4	3
荅	8	9	6	5	2
黍	5	4	4	3	5
实	95	112	116	128	140

或 $9x+7y+3z+2u+5v=140$，　(1)

$7x+6y+4z+5u+3v=128$，　(2)

$3x+5y+7z+6u+4v=116$，　(3)

$2x+5y+3z+9u+4v=112$，　(4)

$1x+3y+2z+8u+5v=95$。　(5)

先由第三行减去第四行。再由第二行、第四行分别减去第三

行，消去其下位。又由左行减第三行，不能消去其下位乃止。即“先以第四行减第三行。次以第三行去右行及第二行、第四行下位。又以减左行下位，不足减乃止”。

	十	九	六	八	七
麻	−22	−26	1	−25	−26
麦	3	5		6	7
菽	−90	−109	4	−124	−137
荅	77	93	−3	101	107
黍	5	4		3	5
实	3		4		

或(3)−(4)：$x+4z-3u=4$。　　(6)

(1)−35(6)：$-26x+7y-137z+107u+5v=0$。　　(7)

(2)−32(6)：$-25x+6y-124z+101u+3v=0$。　　(8)

(4)−28(6)：$-26x+5y-109z+93u+4v=0$。　　(9)

(5)−23(6)：$-22x+3y-90z-77u+5v=3$。　　(10)

其次，由第三行减去左行，不能消去其下位乃止。又由左行减去第三行，消去其下位。并废去第三行。即“次以左行减第三行下位，不足减乃止。次以第三行去左行下位。讫，废去第三行”。(废去第三行后，下面框线内的行号，仍然保持原有的行号不变。)

	十	九	一一	八	七
麻	−22	−26	23	−25	−26
麦	3	5	−3	6	7
菽	−90	−109	94	−124	−137
荅	77	93	−80	101	107
黍	5	4	−5	3	5
实	3		1		

	一二	九	八	七
麻	−91	−26	−25	−26
麦	12	5	6	7
菽	−372	−109	−124	−137
荅	317	93	101	107
黍	20	4	3	5
实				

或(6)－(10)：$23x-3y+94z-80u-5v=1$。　(11)

(10)－3(11)：$-91x+12y-372z+317u+20v=0$。　(12)

由左行减去第四行，消去其下位；又由右行减去第四行，消去其下位。次由第二行、第四行分别减去右行，消去其下位。即“次以第四行去左行下位。又以减右行头位。次以右行去第二行及第四行下位”。

	一三	九	八	一四
麻	39	－26	－25	
麦	－13	5	6	2
菽	173	－109	－124	－28
荅	－148	93	101	14
黍		4	3	1
实				

	一三	一六	一五	一四
麻	39	－26	－25	
麦	－13	－3		2
菽	173	3	－40	－28
荅	－148	37	59	14
黍				1
实				

或　(12)－5(9)：$39x-13y+173z-148u=0$。　(13)

(7)－(9)：$2y-28z+14u+v=0$。　(14)

(8)－3(14)：$-25x-40z+59u=0$。　(15)

(9)－4(14)：$-26x-3y+3z+37u=0$。　(16)

又由第四行及左行分别减去（加上）第二行，因不能消去其头位，计算乃止。次由左行减去第四行，因不能消去左行菽位之数，计算乃止。即“次以第二行减第四行及左行头位，不足减乃止。次以第四行减左行菽位，不足减乃止”。

	一八	一七	一五	一四
麻	14	－1	－25	
麦	－13	－3		2
菽	133	43	－40	－28
荅	－89	－22	59	14
黍				
实				

	一九	一七	一五	一四
麻	17	－1	－25	
麦	－4	－3		2
菽	4	43	－40	－28
荅	－23	－22	59	14
黍				
实				

$(16)-(15)$：$-1x-3y+43z-22u=0$。　　(17)

$(13)+(15)$：$14x-13y+133z-89u=0$。　　(18)

$(18)-3(17)$：$17x-4y+4z-23u=0$。　　(19)

由第二行加上左行，约简所得之余。再由左行、第二行分别加上（减去）第四行，各消去其头位。即“次以左行减第二行头位，余可再半。次以第四行去左行及第二行头位”。

	一九	一七	二十	一四
麻	17	−1	−2	
麦	−4	−3	−1	2
菽	4	43	−9	−28
荅	−23	−22	9	14
黍				1
实				

	二一	一七	二二	一四
麻		−1		
麦	−55	−3	5	2
菽	735	43	−95	−28
荅	−397	−22	53	14
黍				
实				

$(15)+(19)$：$-8x-4y-36z+36u=0$。

约简即得：$-2x-y-9z+9u=0$。　　(20)

$(19)+17(17)$：$-55y+735z-397u=0$。　　(21)

$(20)-2(17)$：$5y-95z+53u=0$。　　(22)

由左行加上第二行，并约简所得之余。于是上位得 5，下位得 3，是为菽 5 相当于荅 3。又由第二行减左行，消去其菽位。再由第四行、右行分别减去左行，因不能消去其菽位之数，计算乃止。即“次以第二行去左行头位。余约之。上得五，下得三，是菽五当荅三。次以左行去第二行菽位。又以减第四行及右行菽位，不足减乃止”。

	二三	一七	二二	一四
麻		−1		
麦		−3	5	2
菽	−5	43	−95	−28
荅	3	−22	53	14
黍				1
实				

	二三	二五	二四	二六
麻		−1		
麦		−3	5	2
菽	−5	3		−3
荅	3	2	−4	−1
黍				1
实				

(21)+11(22)：$-310z+186u=0$，

约简得：$-5z+3u=0$　或　$5z=3u$。　(23)

(22)−19(23)：$5y-4u=0$。　(24)

(17)−8(23)：$-x-3y+3z+2u=0$。　(25)

(14)−5(23)：$2y-3z-u+v=0$。　(26)

再由第二行减去右行，因不能消去其头位，计算乃止。再由右行减去第二行，消去其头位。即注文“次以右行减第二行头位，不足减乃止。次以第二行去右行头位”。

	二三	二五	二七	二六
麻		−1		
麦		−3	1	2
菽	−5	3	6	−3
荅	3	2	−2	−1
黍			−2	1
实				

	二三	二五	二七	二八
麻		−1		
麦		−3	1	
菽	−5	3	6	−15
荅	3	2	−2	3
黍			−2	5
实				

(24)−2(26)：$1y+6z-2u-2v=0$。　(27)

(26)−2(27)：$-15z+3u+5v=0$。　(28)

再由右行减去左行，消去其头位，于是上位得 6，下位得 5，即是荅 6 相当于黍 5。又由右行减去左行，消去荅位之数，约简后则上位得 2，而下位得 1。即注文“次以左行去右行头位。余，上得六，下得五，是为荅六当黍五。次以左行去右行荅位，余，约

之。上为二，下为一"。

	二三	二五	二七	二九
麻		−1		
麦		−3	1	
菽	−5	3	6	
荅	3	2	−2	−6
黍			−2	5
实				

	二三	二五	二七	三十
麻		−1		
麦		−3	1	
菽	−5	3	6	−2
荅	3	2	−2	
黍			−2	1
实				

(28)−3(23)：$-6u+5v=0$ 或 $6u=5v$。 (29)

(29)+2(23)：$-10z+5v=0$， 即 $-2z+v=0$。 (30)

再由第二行加上右行，消去其下位。又由第四行加上第二行，消去其下位。又由左行加上第二行，因不能消去其下位，计算乃止。即"次以右行去第二行下位。以第二行去第四行下位。又以减左行下位，不足减乃止"。

	二三	二五	三一	三十
麻		−1		
麦		−3	1	
菽	−5	3	2	−2
荅	3	2	−2	
黍				1
实				

	三三	三二	三一	三十
麻		−1		
麦	1	−2	1	
菽	−3	5	2	−2
荅	1		2	
黍				1
实				

(27)+2(30)：$y+2z-2u=0$。 (31)

(25)+(31)：$-x-2y+5z=0$。 (32)

(23)+(31)：$y-3z+u=0$。 (33)

其次，由第二行减去左行，消去其下位。于是上位是3，下位是4，即是麦3相当于菽4。再由第四行加上第二行，因不能消去其下位，计算乃止。即"次左行去第二行下位，余，上得三，下得四，是为麦三当菽四。次以第二行减第四行下位，不足减乃

止”。

	三三	三二	三四	三十
麻		-1		
麦	1	-2	3	
菽	-3	5	-4	-2
荅	1			
黍				1
实				

	三三	三五	三四	三十
麻		-1		
麦	1	1	3	
菽	-3	1	-4	-2
荅	1			
黍				1
实				

$(31)+2(33)$：$3y-4z=0$　或　$3y=4z$。　(34)

$(32)+(34)$：$-x+y+z=0$。　(35)

再由第二次行加上第四行，消去其下位。所得之余，上位得4，下位得7，即是麻4相当于麦7。即“次以第四行去第二行下位。余，上得四，下得七，是为麻四当麦七”。

	三三	三五	三六	三十
麻		-1	-4	
麦	1	1	7	
菽	-3	1		-2
荅	1			
黍				1
实				

$(34)+4(35)$：$-4x+7y=0$　或　$4x=7y$。　(36)

由(23)、(29)、(34)、(36)各式可得$z=3u$，$6u=5v$，$3y=4z$，$4x=7y$，即是全部各未知数的相当之率。根据麻4相当于麦7，可得麻价率7而麦价率4；根据麦3相当于菽4，可得麦价率4而菽价率3；根据菽5相当于荅3，可得菽价率3而荅价率5；根据荅6相当于黍5，可得荅价率5而黍价率6。所有未知数的比率都已通达，即得$x:y=7:4$，$y:z=4:3$，$z:u=3:5$，$u:v=5:6$。也可得：

$x:y:z:u:v=7:4:3:5:6$。

重置原第三行，减去原第四行，即得(6)式，称为减行，即 $x+4z-3u=4$。今欲求麻1斗之价，使减行都化为麻数，以菽价率3、荅价率5、分别乘以菽、荅之斗数，除以麻价率7。即得麻价数。即：

$$4z=4\times(3/7)x=(12/7)x,$$

$$-3u=-3\times(5/7)x=-(15/7)x,$$

代入减行，则减行化为 $x+(12/7)x-(15)x=4$，或 $(4/7)x=4$，

故得： $x=7$（钱）。

仿此可得 $y=4$ 钱，$z=3$ 钱，$u=5$ 钱，$v=6$ 钱。

如刘徽注文所说，也可以“其一术”进行计算，置五行通率即连比，即麻7、麦4、菽3、荅5、黍6作为列衰。即

$$x:y:z:u:v=7:4:3:5:6。$$

在减行 $x+4z-3u=4$ 中，各未知数分别代以其比率，得 $1\times7+4\times3-3\times5=4$，作为除数，以其下实乘以各自列衰作为被除数，则分别得各未知数之价为：

麻：$(4\times7)/4=7$(钱)；麦：$(4\times4)/7=4$(钱)；菽：$(4\times3)/4=3$(钱)；荅：$(4\times5)/4=5$(钱)；黍：$(4\times6)/4=6$(钱)。

这种计算方法，可以以实约法，不必再乘以列衰，可由列衰直接计算各未知数之价，这种计算共需经过124次运算。如刘徽注所说“此可以实约法，则不复乘列衰，各以列衰如所约知其价。如此则凡用一百二十四算也。”

由以上所述，可知刘徽对“方程术”的重大贡献。

第三章　刘徽的级数理论

《九章算术》里，在代数方面，除有开方、“方程”以外，还有不少有关级数的理论和算法，尤其刘徽对级数的创新阐述与推广意义，都具有其独到的特色。今按照级数的类别，逐条分析如下：

第一节　“衰分”算法与级数算法

《九章算术》第三章为“衰分”，章端列有“衰分术”，其文为：

“衰分术曰：各置列衰，副并为法，以所分乘未并者，各自为实，实如法而一。不满法者，以法命之。”

在术文之下，刘徽注称：

“衰分，差分也。”又称“列衰，相与率也。重叠，则可约。”还注称“法集而衰别。数本一也，今以所分乘上别，以下集除之，一乘一除适足相消，故所分犹存，且各应率而别也。於今有术，列衰各为所求率，副并为所有率，所分为所有数。又以经分言之，假令甲家三人，乙家二人，丙家一人，并六人，共分十二，为人得二也。欲复作逐家者，则当列置人数，以一人所得乘之。今此术先乘而后除也。”

“衰分”，即是依照一定的比率进行分配的意思，如按1∶2的比率进行分配物品，其中1∶2就是“衰”。如《左传·襄公二十五年》称：“且昔天子之地一圻，列国一同；自是以衰。”再如李籍《九章算术音义》称：“衰，差也。以差为平分，故曰衰分。”程大位《算法统宗》称：“衰者，等也。物之混者，求其等而分之。以物之多寡求出税，以人户等第求差徭，以物价求贵贱、高低者

也。”“衰分”也称为“差分”，若按现今术语而论，即是配分法或配分比例。

术文“各置列衰”，就是将所配的比率按次序排列在一起。设若所配的比率为 a_1，a_2，a_3，…，a_n，则按其某种次序排列为：

$$a_1 : a_2 : a_3 : \cdots : a_n。$$

这些比率当是既约之值，即是不能再约简的数值，所以刘徽注说“列衰，相与率也。重叠，则可约。”刘徽注“法集”，就是以所配的比率相加之和作为除数，在进行除法中，其“法”数是“集”列衰于一起的意思；如术文说“副并为法”。也即 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 为除数，由于所配的比率各自有别，所以刘徽注称各比率数为“衰别”。也即“衰别”为 a_1，a_2，a_3，…，a_n。

古代以算筹进行除法运算时，往往将法数置于实数之下，实数置于法数之上；刘徽注所谓“上别”，就是摆在“法集”之上的实数，也即摆在上行的“衰别”；所谓“下集”，就是摆在“衰别”之下的法数，也即摆在下行的“法集”。

今以“衰分章”第1问为列，说明“衰分术”算法；其“衰别”为5，4，3，2，1，“法集”为5+4+3+2+1=15；而5人所分为5鹿，每人所配之鹿为：

大夫得：(5×5 鹿)÷15=[1+(2/3)]鹿，

不更得：(4×5 鹿)÷15=[1+(1/3)]鹿，

簪袅得：(3×5 鹿)÷15=1 鹿，

上造得：(2×5 鹿)÷15=(2/3)鹿，

公士得：(1×5 鹿)÷15=(1/3)鹿。

各人所得之比率为[1+(2/3)]：[1+(1/3)]：1：(2/3)：(1/3)=5：4：3：2：1，即注文说“各应率而别之”。

按刘徽注所举之例证而论，若用分数除法计算，所说6人共分12物，则人得12÷6=2物；即“人得二也”。若按逐家计算，即“欲复作逐家者，则当列置人数，以一人所得乘之”。即

甲家得：(12÷6)×3＝6，

乙家得：(12÷6)×2＝4，

丙家得：(12÷6)×1＝2。

若将上述算法推而广之，则设n家所得分别为$B_1,B_2,B_3,\cdots,B_n$。而列衰分别为$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$；设$n$家所分为$A$；又设列衰之和为$M=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$。按术计算，即得各家所得为：

$B_1=(A\cdot a_1)/M$，$B_2=(A\cdot a_2)/M$，

$B_1=(A\cdot a_3)/M$，$\cdots$，$B_n=(A\cdot a_n)/M$，

以上就是“衰分术”的一般算法。

衰分章第7问为：

今有禀粟五斛，五人分之，欲令三人得三，二人得二。问：各几何？

答曰：三人，人得一斛一斗五升十三分升之一；

二人，人得七斗六升十三分之十二”。

术曰：置三人，人三；二人，人二；为列衰。副并为法。以五斛乘未并者，各自为实。实如法得一斛。

返衰术曰：列置衰而令相乘，动者为不动者衰。

在“返衰术”下，刘徽注称：

“以爵次言之，大夫五、不更四。欲令高爵得多者，当使大夫一人受五分，不更一人受四分，人数为母，分数为子。母同则子齐，齐即衰也。故上衰分宜以五、四为列焉。今此令高爵出少，则当使大夫五人共出一人分，不更四人共出一人分，故谓之返衰。人数不同，则分数不齐，当令母互乘子，母互乘子则动者为不动者衰也。亦可先同其母，各以分母约其同，为返衰。副并为法，以所分乘未并者，各自为实，实如法而一。”

刘徽为了说明“返衰术”，先以“大夫五、不更四”为例说明大夫、不更一人之衰，由于大夫、不更都是一人，故以1作为分母，因其爵次之比为5∶4，即是以其衰作为分子，则所得之分数

各为 (5/1)、(4/1)，就是刘徽注所说“人数为母，分数为子”。也即“大夫一人受五分，不更一人受四分”。在 (5/1)、(4/1) 中，其分母相同，而分子则相齐，故知 5∶4 即大夫与不更之衰。也即“故上衰分宜以五、四为列焉”。但在第 7 问中，需要利用“返衰术”计算；所谓“返衰术”，就是以各家列衰的倒数为“衰”，就叫做“返衰”。刘徽举例说，“今此令高爵出少，则当使大夫五人共出一人分，不更四人共出一人分”。由于“人数为母，分数为子”。于是得(1/5)∶(1/4)为“返衰”。既然“人数不同”，则分子也不齐，所以应“母互乘子，母互乘子则动者为不动者衰”。即是

$$(1/5):(1/4)=(4/20):(5/20)=4:5。$$

其中“母互乘子”后之值，刘徽称为“动者”；而原分数则称为“不动者”。在上式中 4∶5 即是“动者”，而(1/5)∶(1/4)即是“不动者”。

对于需要用“返衰术”计算的问题，当以其“返衰”作为“衰”，再按“衰分术”的一般算法进行计算。

一般说，《九章算术》衰分章的列衰多是整数，而所得之“返衰”则多为分数，为了把所得之“返衰”化为整数，必须依据“齐同原理”使之化为整数。为方便计，设列衰为：

$$(b_1/a_1):(b_2/a_2):(b_3/a_3):\cdots:(b_n/a_n),$$

其“返衰”则为其倒数，按“齐同原理”，可得：

$$(a_1/b_1):(a_2/b_2):(a_3/b_3):\cdots:(a_n/b_n)$$
$$=(a_1/b_1)B:(a_2/b_2)B:(a_3/b_3)B:\cdots:(a_n/b_n)B。$$

其中 $B=b_1\cdot b_2\cdot b_a\cdot\cdots\cdot b_n$，即是“返衰”中各分母的乘积。《九章算术》及刘徽都把 $(a_1/b_1)B$，$(a_2/b_2)B$，$(a_3/b_3)B$，…，$(a_n/b_n)B$ 称为“动者”，而把 a_1/b_1，a_2/b_2，a_3/b_3，…，a_n/b_n 称为“不动者”。上式即是“动者为不动者衰”。

在“衰分术”及“返衰术”中，所列之“衰”虽是按一定比率的数，但其中各个数值之间却有某种关系，若具有“等差”关

系，则形成等差级数；若具有“等比”关系，则形成等比级数；若具有“调和”关系，则形成调和级数；可见“衰分术”与“返衰术”中的“衰”，是与级数有其密切关系的。

第二节　刘徽的等比级数算法

《九章算术》衰分章第2问为：

今有牛、马、羊食人苗。苗主责之粟五斗。羊主曰：‘我羊食半马’。马主曰：‘我马食半牛’。今欲衰偿之，问各出几何？

答曰：牛主出二斗八升七分升之四。

马主出一斗四升七分升之二。

羊主出七升七分升之一。

术曰：置牛四、马二、羊一，各自为列衰，副并为法。以五斗乘未并者各自为实，实如法得一斗。

术文之下，李淳风注称：

“此术问意，羊食半马，马食半羊，是谓四羊当一牛，二羊当一马。今术置羊一、马二、牛四者，通其率以为列衰。”

按术则得列衰为：牛∶马∶羊＝4∶2∶1，

其各衰之和：4＋2＋1＝7作为除数，

以5斗乘未加前之各衰，作为被除数，相除则分别得：

牛＝50×4÷7＝(28＋4/7)(升)；

马＝50×2÷7＝(14＋2/7)(升)；

羊＝50×1÷7＝(7＋1/7)(升)。

衰分章第4问为：

今有女子善织，日自倍，五日织五尺。问：日织几何？

答曰：初日织一寸三十一分寸之十九。

次日织三寸三十一分寸之七。

次日织六寸三十一分寸之十四。

次日织一尺二寸三十一分寸之二十八。

次日织二尺五寸三十一分寸之二十五。

术曰：置一、二、四、八、十六为列衰，副并为法，以五尺乘未并者，各自为实，实如法得一尺。

按术则得列衰为：初日：次日：三日：四日：末日＝1：2：4：8：16，以各衰之和：1＋2＋4＋8＋16＝31 作为除数，以 5 尺乘未加前之各衰，作为被除数；相除则分别得：

初日＝50×1÷31＝(1＋19/31)(寸)；

次日＝50×2÷31＝(3＋17/31)(寸)；

三日＝50×4÷31＝(6＋14/31)(寸)；

四日＝50×8÷31＝(12＋28/31)(寸)；

末日＝50×16÷31＝(25＋25/31)(寸)。

在《九章算术》中，表面看来，虽有些不多的等比级数问题，但实际上，这些问题都是属于“衰分”的问题；就以第 2 问为例，此问之列衰为 1：2：4，虽然经文所说“半马”、“半牛”，而 1：2：4 恰是“公比”为“一半”或“一倍”等比级数之相邻三项，因而就视之为《九章算术》的等比级数问题；其中第 4 问，其列衰为 1：2：4：8：16，由于“术文”称之为“日自倍”，所以也就视为《九章算术》的另一等比级数的相邻五项。由《九章算术》的全部经文来看，涉及等比级数的问题，只有这两道问题，但绝不等于说在中国传统数学中，就没有等比级数的问题。

在《庄子·天下篇》中，载有名家惠施的著名学说：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”大意是说，有一尺长的木棒，每日截取其前一日剩余的一半，即使截取一万年，所截取之和也达不到一尺。虽然每次所取的剩余也逐渐趋近于零，但因经文中有“取”之一字，所以应理解“万世不竭”为：截取一万年，所截取之和也达不到一尺。即

第一日所取：(1/2) 尺，　　　　第二日所取：(1/4) 尺，

第三日所取：(1/8) 尺，　　第四日所取：(1/16) 尺，
………，　　第 n 日所取：$(1/2^n)$ 尺。

而一万年所截取之和为：

$$\lim[(1/2)+(1/4)+(1/8)+(1/16)+\cdots+(1/2^n)]=1(\text{尺})。$$

由这一式子来看，其中不但具有等比级数的一般概念，而且还有利用极限观念推求等比级数和的极限问题。可见，等比级数的概念，在中国形成很早。

在《九章算术·衰分》中，刘徽虽未给第 2、4 问作注，但在方田章割圆术中，却使用了等比级数的概念。

在割圆术里，刘徽以圆内接正 6 边形为基础，当求得圆内接正 12、24、48、96、192 边形面积，用以验证王莽嘉量斛时说，“此术微少，而差幂六百二十五分寸之一百五。以十二觚之幂为率消息，当取此分寸之三十六，以增于一百九十二觚之幂以为圆幂，三百一十四寸二十五分寸之四。”刘徽所求得之各多边形面积分别为：

$S_{12}=300$，　$S_{24}=310+364/625$，　$S_{48}=313+164/625$，

$S_{96}=313+584/625$，　$S_{192}=314+64/625$。

其相邻两多边形之面积差各为：

$S_{24}-S_{12}=6614/625$，　$S_{48}-S_{24}=1675/625$，

$S_{96}-S_{48}=420/625$，　$S_{192}-S_{96}=105/625$。

从而可得　$[S_{24}-S_{12}]/[S_{48}-S_{24}]\approx 4$，

$[S_{48}-S_{24}]/[S_{96}-S_{48}]\approx 4$，

$[S_{96}-S_{48}]/[S_{192}-S_{96}]=4$，……，

故得：　$S_{384}-S_{192}=(105/625)\times(1/4)$，

$S_{758}-S_{384}=(105/625)\times(1/4)\times(1/4)$，

……

将上式依次相加，即得圆面积为：

$$S = S_{192} + ((1/4) + (1/4^2) + \cdots) \cdot (S_{192} - S_{96})$$
$$= [314 + (64/625)] + ((1/4) + (1/4^2) + \cdots) \cdot (105/625)$$
$$\approx \{[314 + (64/625)] + (36/625)\}$$
$$= 314 + (4/25)。$$

以上论证，是数学史家三上义夫的见解①，这种见地十分中肯，今从其说，但等比级数求和问题，是应该进一步探讨的。即如

$$(1/4) + (1/4^2) + (1/4^3) + \cdots + (1/4^n)$$

之和的问题。由名家惠施所说“一尺之棰，日取其半，万世不竭”可知，

$$\lim[(1/2) + (1/2^2) + (1/2^3) + \cdots + (1/2^n)] = 1。$$

据此可以类似地求得

$$\lim[(1/4) + (1/4^2) + (1/4^3) + \cdots + (1/4^n)] = 1/3。$$

于是，当圆内接正多边形的边数无限增多时，上式中

$$\lim\{[(1/4) + (1/4^2) + \cdots + (1/4^n)] \times (105/625)\}$$
$$= (1/3) \times (105/625) = 35/625 \approx 36/625。$$

因而则得圆面积为：$S = 314 + (100/625) = 314 + (4/25)$。
由此可见，刘徽在等比级数方面有所创新。

第三节　刘徽的等差级数算法

《九章算术》衰分章第1问为：

今有大夫、不更、簪裹、上造、公士，凡五人，共猎得五鹿。欲以爵次分之，问：各几何？

答曰：大夫得一鹿三分鹿之二；

---

① 〔日〕三上义夫.“关孝和の业绩と京坂の算家并に支那の算法との关系及び比较. 东洋学报，卷20，21，22（1932～1935）.

不更得一鹿三分鹿之一；

簪袅得一鹿；

上造得三分鹿之二；

公士得三分鹿之一。

术曰：列置爵数，各自为衰，副并为法。以五鹿乘未并者，各自为实。实如法得一鹿。

术文之下，刘徽注称：

“爵数者，谓大夫五、不更四、簪袅三、上造二、公士一也。《墨子·号令篇》‘以爵级为赐’，然则战国之初有此名也。”“于今有术，列衰各为所求率，副并为所有率，今有鹿数为所有数，而今有之，即得。”

《汉书·百官公卿表》称：“爵一级曰公士，二上造，三簪袅，四不更，五大夫，……，二十彻侯。皆秦制。”由此可知，所谓“大夫五、不更四、……”，都是秦制的序号，既然《九章算术》及刘徽都以秦制序号为列衰，因而必然是按等差级数入算，于是在中国传统数学中，等差级数就形成了一条独特的分支。

依据术文，爵数列衰为：

大夫：不更：簪袅：上造：公士＝5：4：3：2：1，

其和为：5＋4＋3＋2＋1＝15，

于是得：大夫得　5 鹿×5÷15＝[1＋(2/3)]鹿，

不更得　5 鹿×4÷15＝[1＋(1/3)]鹿，

簪袅得　5 鹿×3÷15＝1 鹿，

上造得　5 鹿×2÷15＝(2/3)鹿，

公士得　5 鹿×1÷15＝(1/3)鹿。

衰分章第 6 问为：

今有禀粟，大夫、不更、簪袅、上造、公士，凡五人，一十五斗。今有大夫一人后来，亦当禀五斗。仓无粟，欲以衰出之，问：各几何？

答曰：大夫出一斗四分斗之一；

不更出一斗；

簪裊出四分斗之三；

上造出四分斗之二；

公士出四分斗之一。

术曰：各置所禀粟斛斗数，爵次均之，以为列衰，副并而加后来大夫亦五斗，得二十以为法以五斗乘未并者，各自为实实如法得一斗。

术文下刘徽注称：

“禀前五人、十五斗者，大夫得五斗，不更得四斗，簪裊得三斗，上造得二斗，公士得一斗。欲令五人各依所得粟多少，减与后来大夫，即与前来大夫同。据前来大夫已得五斗，故言‘亦’也。各以所得斗数为衰，并得十五，而加后来大夫亦五斗，凡二十为法也。是为六人共出五斗，后来大夫亦俱损折。今有术副并为所有率，未并者各为所求率，五斗为所有数，而今有之，即得。”

因为共有大夫等5人，原有15斗粟，若按秦制序号为列衰，则各人所得之粟数与第1题类似，但此题又有后来大夫1人，需问每人各自应出多少斗粟，所以前面列衰为等差级数，而后面列衰则非等差级数；即：

大夫：不更：簪裊：上造：公士：大夫

$=5:4:3:2:1:5$，

其和为：$5+4+3+2+1+5=20$，

故得：原来大夫应出：5斗$\times5\div20=[1+(1/4)]$斗，

不更应出：5斗$\times4\div20=1$斗，

簪裊应出：5斗$\times3\div20=(3/4)$斗，

上造应出：5斗$\times2\div20=(2/4)$斗，

公士应出：5斗$\times1\div20=(1/4)$斗。

以上5人共出$[1+(1/4)]+1+(3/4)+(2/4)+(1/4)=[3+(3/$

4)]（斗），即后来大夫应得 [3+(3/4)] 斗粟，也可看作后来大夫得 5 斗粟，而

后来大夫也应出：5 斗×5÷20=[1+(1/4)]斗。

《九章算术》均输章第 17 问为：

今有金箠，长五尺。斩本一尺，重四斤。斩末一尺，重二斤。问次一尺各重几何？

答曰：末一尺，重二斤。

次一尺，重二斤八两。

次一尺，重三斤。

次一尺，重三斤八两。

次一尺，重四斤。

术曰：令末重减本，余即差率也。又置本重，以四间乘之，为下第一衰。副置，以差率减之，每尺各自为衰。副置下第一衰以为法，以本重四斤遍乘列衰，各自为实。实如法得一斤。

在术文之下，刘徽注称：

"按此术，五尺有四间者，有四差也。令本末相减，余，即四差之凡数也。以四约之，即得每尺之差。以差数减本重，余，即次尺之重也。为术所置，如是而已。今此率，以四为母，故令母乘本为衰，通其率也。亦可置末重以四间乘之，为上第一衰。以差率加之，为次下衰也。""以下第一衰为法，以本重乘其分母之数，而又取此率乘本重为实。一乘一除，势无损益，故惟本存焉。众衰相推为率，则其余可知也。亦可副置末衰为法，而以末重二斤乘列衰为实。此虽迂回，然是其旧故就新而言之也。"

按此问计算，当是配分比例算法，但实际上乃是等差级数算法；若依现今算法而论，此问相当于已知首项即本重：$a_1=4$ 斤，末项即末重：$a_5=2$ 斤，项数即共有节数为 5，而推求其他各节之重，即各项之值，即 a_2，a_3，a_4，或 a_1-d，a_1-2d，a_1-3d。因"本重减末重"，所得为术文之"差率"，也即注文之"四差"，或

“四差之凡数”，即

$$a_1-a_5=2\text{（斤）}=4d,$$

故得“每尺之差”即公差为：$d=(a_1-a_5)/4=(1/2)$斤，

“以差数减本重，余即次尺之重也”，故得其他各节之重分别为：

$$a_2=a_1-d=[3+(1/2)]\text{斤},$$

$$a_3=a_1-2d=3\text{ 斤},$$

$$a_4=a_1-3d=[2+(1/2)]\text{斤}。$$

因首、末项相减为公差之 4 倍，若除以 4，未必能整除，故术文及注文都以 4 间乘本重 4 斤以为衰，故得：

$$4\times a_1=4\times 4,$$

即是下第一衰，而其他各节之衰为：

$$4\times a_1-4d=4\times 4-2,$$

$$4\times a_1-4d-4d=4\times 4-2-2,$$

$$4\times a_1-4d-4d-4d=4\times 4-2-2-2,$$

$$4\times a_1-4d-4d-4d-4d=4\times 4-2-2-2-2,$$

或其列衰为：16，14，12，10，8。

于是，按术可得各尺之重分别为：

本重为：　$(4a_1\times a_1)\div 4a_1=16\times 4\div 16=4$，

前一尺：　$[4(a_1-d)\times a_1]\div 4a_1$

$=14\times 4\div 16=3+1/2$，

前一尺：　$[4(a_1-2d)\times a_1]\div 4a_1=12\times 4\div 16=3$，

前一尺：　$[4(a_1-3d)\times a_1]\div 4a_1$

$=10\times 4\div 16=2+1/2$，

末重为：　$[4(a_1-4d)\times a_1]\div 4a_1=8\times 4\div 16=2$。

按照刘徽注文，也可置末重乘以四间，作为“上第一衰”，即

$$4\times a_5=4\times 2,$$

于是，加以“差率”，即分别得其他各节之衰为

$$4\times a_5+4d=4\times 2+2,$$

$4\times a_5+4d+4d=4\times2+2+2,$

$4\times a_5+4d+4d+4d=4\times2+2+2+2,$

$4\times a_5+4d+4d+4d+4d=4\times2+2+2+2+2,$

或其列衰为：8，10，12，14，16。类似地可得各节之重为：

末重为：　$4a_5\times a_5\div4a_5=8\times2\div8=2$，

次一尺：　$[(4a_5+d)\times a_5]\div4a_5=10\times2\div8=2+1/2$，

次一尺：　$[(4a_5+2d)\times a_5]\div4a_5=12\times2\div8=3$，

次一尺：　$[(4a_5+3d)\times a_5]\div4a_5=14\times2\div8=3+1/2$，

本重为：　$[(4a_5+4d)\times a_5]\div4a_5=16\times2\div8=4$。

由以上术文及刘徽注文来看，不仅知道等差级数推求“公差”的公式，即

$$d=(a_n-a_1)\div(n-1);$$

而且还深知等差级数的“通项”公式，即

$$a_1-nd=a_{n+1},\quad 或者\quad a_1+nd=a_{n+1}。$$

《九章算术》及刘徽注对等差级数是有深切的研究成果的。

在上式 $(4a_1\times a_1)\div4a_1=16\times4\div16=4$ 中，刘徽注称“以下第一衰为法，以本重乘其分母之数，而又取此率乘本重为实。一乘一除，势无损益，故惟本存焉”。根据上式计算结果，易知只有“本重”即 a_1 一数，故注文为“故惟本存焉”。钱宝琮校本依据殿本讹作“为”，似无必要。

均输章第18问为：

今有五人分五钱，令上二人所得与下三人等。问：各得几何？

答曰：甲得一钱六分钱之二；

乙得一钱六分钱之一；

丙得一钱；

丁得六分钱之五；

戊得六分钱之四。

术曰：置钱锥行衰，并上二人为九，并下三人为六，六少于

九，三。以三均加焉，副并为法。以所分钱乘未并者，各自为实。实如法得一钱。

在术文之下，刘徽注称：

“按此术锥行者，谓如立锥，初一、次二、次三、次四、次五，各均为一列衰也。”“数不得等，但以五、四、三、二、一为率也。”“此问者，令上二人与下三人等。上、下部差一人，其差三。均加上部，则得二三；均加下部，则得三三。下部犹差一人、差得三，以通于本率，即上、下部等也。于今有术，副并为所有率，未并者各为所求率，五钱为所有数，而今有之，即得等耳。假令七人分七钱，欲令上二人与下五人等，则上、下部差三人，并上部为十三，下部为十五，下多上少，下不足减上，当以上、下部列差而后均减，乃合所问耳。此可仿下术，令上二人分二钱半为上率，令下三人分二钱半为下率，上、下二率以少减多，余为实。置二人、三人各半，减五人，余为法。实如法得一钱，即衰相去也。下率六分之五者，丁所得钱数也。”

刘徽注文中，先说明所谓“锥行衰”的意义，即是说，“锥行衰”就是以5、4、3、2、1为列衰，也即李籍《九章算术音义》所说：“上多下少，如立锥之形”。既然以5、4、3、2、1为列衰，其上部二人列衰为5、4，相加之和为$5+4=9$，而下部三人列衰为3、2、1，相加之和为$3+2+1=6$，即“并上二人为九，并下三人为六，六少于九，三”。所以刘徽又说，由于以5、4、3、2、1为列衰，其数则不得等。也就是上、下部相差一人，而其列衰则差3。刘徽提出另一办法，若以此差加于上部每人，共加两个3。即“二三”。若以此差加于下部每人，共加三个3。即“三三”。若以此差加于原来列衰，原来列衰为3、2、1，今则为6、5、4。原来列衰为5、4，今则为8、7。于是上、下部之和分别为：$8+7=15$，$6+5+4=15$。即是“上、下部等也”。

本问所述5人列衰可为8、7、6、5、4，其和为$8+7+6+5$

$+4=30$，而所分之钱数为5，依今有术算法、按“锥行衰”计算，可得

甲得：$5\times8\div30=[1+(2/6)]$(钱)，

乙得：$5\times7\div30=[1+(1/6)]$(钱)，

丙得：$5\times6\div30=1$(钱)，

丁得：$5\times5\div30=(5/6)$(钱)，

戊得：$5\times4\div30=(4/6)$(钱)。

本问也可按等差级数算法计算，设甲、乙、丙、丁、戊等五人所得之钱数分别为a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，而各人所得钱数之差即“公差”设为d，依题意则得下式：

$$a_1+a_2=a_3+a_4+a_5, \quad \text{或} \quad 2a_1-d=3a_1-9d,$$

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5。 \quad 5a_1-10d=5。$$

解上述二元一次方程组，于是得：

$$a_1=1+(2/6), \quad a_2=1+(1/6),$$

$$a_3=1, \quad a_4=5/6,$$

$$a_5=4/6。$$

这是按等差级数的算法计算的。在此基础上，刘徽还仿照“下术”提出另一算法：就是以等差级数前两项之算术平均，称为“上率”；即

$$(a_1+a_2)/2=[2+(1/2)]/2=5/4。$$

以等差级数后三项之算术平均或其中间项之值，称为“下率”；即

$$(a_3+a_4+a_5)/3=a_4=[2+(1/2)]/3=5/6。$$

以上、下率之差作为实；也即以“公差”的$[2+(1/2)]$倍作为实。即

$$[(a_1+a_2)\div2]-[(a_3+a_4+a_5)\div3]$$
$$=[(2a_1-d)\div2]-[(3a_1-9d)\div3]$$
$$=[2+(1/2)]d。$$

再由5人减去前2人与后3人的算术平均，作为法。实际上，在

等差级数中，是以项数5，减去前两项项数算术平均与后三项项数算术平均之和，以此差数作为法；实除以法测得“公差”。即

$$d=[(5/4)-(5/6)]\div[2+(1/2)]=1/6。$$

由这一算法不难看出，在等差级数中，刘徽不但深知“通项”公式，还深知推求“公差”的正确公式，即

$$a_n=a_1-(n-1)d,$$

$$d=[a_m-a_n]\div(m-n)。$$

刘徽还将前面所论五人分五钱之“锥行衰”算法，推广为七人分七钱，并设其列衰为7、6、5、4、3、2、1，欲使上部二人所分得之钱数，与下部五人所分得之钱数相等，由于上、下部相差三人，而上、下部列衰之和分别为 $7+6=13$，$5+4+3+2+1=15$，上多下少，不能均加，乃采用“均减”。即是由列衰减去以上、下部列衰和之差（$15-13=2$）作为分子，以上、下部人数差（$5-2=3$）作为分母的分数（2/3）。故得各列衰分别为

$$7-(2/3),6-(2/3),\quad 5-(2/3),4-(2/3),$$

$$3-(2/3),2-(2/3),1-(2/3)。$$

或 $\quad 19/3,\ 16/3,\ 13/3,\ 10/3,\ 7/3,\ 4/3,\ 1/3。$

于是，上部二人之列衰和等于下部五人之列衰和。即

$$(19/3)+(16/3)$$

$$=(13/3)+(10/3)+(7/3)+(4/3)+(1/3)=35/3。$$

而七人之列衰和为：

$$(19/3)+(16/3)+(13/3)+(10/3)+(7/3)$$

$$+(4/3)+(1/3)=70/3。$$

依今有术，七人所得钱数分别为：

$$a_1=19/10,\ a_2=16/10,\ a_3=13/10,\ a_4=10/10,$$

$$a_5=7/10,\ a_6=4/10,\ a_7=1/10。$$

根据刘徽的设想，我们可以把这种“锥行衰”的均加法、均减法予以推广：

假设 n 人分 n 钱（即人数与钱数相等），上部 s 人所得与下部 $n-s$ 人所得相等（其中 $s<(n-s)$），按“锥行衰”计算，其列衰为 n，$n-1$，$n-2$，…，3，2，1。又设 a_t 为第 t 人所分之钱（$1\leqslant t\leqslant n$），再设上部、下部之列衰和分别为 u、v；即

$$u=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-s+1);$$

$$v=(n-s)+(n-s-1)+(n-s-2)+\cdots+3+2+1。$$

其中人数差设为 p，即 $p=(n-s)-s=n-2s$，　列衰差设为 m，即 $m=u-v$，若 $m=0$，则合所问。若 $m>0$，则原列衰均加 m/p；若 $m<0$，则原列衰均减 m/p。这样，所得之上部列衰与下部列衰相等，即

$$[n+(m/p)]+[(n-1)+(m/p)]+\cdots+[(n-s+1)+(m/p)]$$

$$=[(n-s)+(m/p)]+[(n-s-1)+(m/p)]+\cdots+[2+(m/p)]+[1+(m/p)]$$

$$=u+(s\cdot m/p)=v+[(n-s)\cdot m/p]。$$

其列衰之总和为：

$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-s+1)+(n-s)+\cdots+2+1+[n\cdot(m/p)]$$

$$=[n(n+1)]/12+[n\cdot(m/p)]。$$

依比例算法，即可求得 n 人分 n 钱，各人所分之钱数。

《九章算术》均输章第 19 问为：

今有竹九节，下三节容四升，上四节容三升。问中间二节欲均容各多少？

答曰：下初，一升六十六分升之二十九；

次，一升六十六分升之二十二；

次，一升六十六分升之一十五；

次，一升六十六分升之八；

次，一升六十六分升之一；

次，六十六分升之六十；

次，六十六分升之五十三；

次，六十六分升之四十六；

次，六十六分升之三十九。

术曰：以下三节分四升为下率，以上四节分三升为上率。上、下率以少减多，余为实。置四节、三节，各半之，以减九节，余为法。实如法得一升，即衰相去也。下率，一升少半升者，下第二节容牟。

在术文之下，刘徽逐句注称：

“此二率者，各其平率也。”“按此上、下节各分所容为率者，各其平率。上、下以少减多者，余为中间五节半之凡差，故以为实也”。“按此术，上、下节所容已定之节，中间相去节数也。实者，中间五节半之凡差也。故实如法而一，则每节之差也。”“一升少半升者，下三节通分四升之之平率。平率即为中分节之容也。”

为了计算方便，由下至上设9节各节的容量为a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，a_9，其下3节所容之算术平均为

$$(a_1+a_2+a_3)\div 3=4/3(\text{升}) \qquad \text{或} \qquad a_2=4/3(\text{升}),$$

称为“下率”。即术文所说“下率，一升少半升者，下第二节容也”。也即刘徽注所说：“一升少半升者，下三节通分四升之平率。平率即为中分节之容也”。其上4节所容之算术平均为：

$$(a_6+a_7+a_8+a_9)\div 4=3/4(\text{升}),$$

或 $$(a_6+a_9)\div 2=(a_7+a_8)\div 2=3/4(\text{升}),$$

称为“上率”。

其上、下率之差，即$(4/3)-(3/4)=(7/12)$升，就是“公差”的5.5倍，也即刘徽注“上、下以少减多者，余为中间五节半之凡差”。以此作为被除数。再由9节减去下3节之半，即4/2升，再减去上4节之半，即3/2升，即

$$9-[(4/2)+(3/2)]=[5+(1/2)]$$

作为除数。被除数除以除数，即得公差为

$$d=(7/12)\div[5+(1/2)]=(7/66)(\text{升})。$$

即术文所说“衰相去也”。

根据公差为 $d=(7/66)$ 升，易于求得每节之容，例如，因 $a_2=a_1-d=(4/3)$，故得

$$a_1=(4/3)+(7/66)=(95/66)=[1+(29/66)](\text{升}),$$

类似地，可得其他各节之容：

$$a_2=[1+(33/66)](\text{升}),\ a_3=[1+(15/66)](\text{升}),$$
$$a_4=[1+(8/66)](\text{升}),\ a_5=[1+(1/66)](\text{升}),$$
$$a_6=(60/66)(\text{升}),\ a_7=(53/66)(\text{升}),$$
$$a_8=(46/66)(\text{升}),\ a_9=(39/66)(\text{升})。$$

《九章算术》盈不足章第 19 问为：

今有良马与驽马发长安至齐。齐去长安三千里。良马初日行一百九十三里，日增十三里。驽马初日行九十七里，日减半里。良马先至齐，复还迎驽马。问：几何日相逢及各行几何？

答曰：一十五日一百九十一分日之一百三十五而相逢。

良马行四千五百三十四里一百九十一分里之四十六。

驽马行一千四百六十五里一百九十一分里之一百四十五。

术曰：假令十五日，不足三百三十七里半。令之十六日，多一百四十里。以盈、不足维乘假令之数，并而为实。并盈不足为法。实如法而一，得日数。不尽者，以等数除之而命分。

在术文之下，刘徽注称：

“求良马行者：十四乘益疾里数而半之，加良马初日之行里数，以乘十五日，得十五日之凡行。又以十五日乘益疾里数，加良马初日之行，以乘日分子，如日分母而一，所得加前良马凡行里数，即得定行里数及其不尽而命分。求驽马行者：以十四乘半里，又半之，以减驽马初日之行里数。乘十五日得驽马十五日之凡行。又

以十五日乘半里，以减驽马初日之行，余以乘日分子，如日分母而一，所得加前里，即驽马定行里数。其奇半里者为半法。以半法增残分，即得其不尽者而命分。按令十五日，不足三百三十七里半者；据良马十五日凡行四千二百六十里，除先去齐三千里，定还迎驽马一千二百六十里。驽马十五日，凡行一千四百二里半。并良、驽二马所行得二千六百六十二里半。课于三千里，少三百三十七里半，故曰不足。令之十六日，多一百四十里者；据良马十六日凡行四千六百四十八里，先除去齐三千里，定还迎驽马一千六百四十八里。驽马十六日凡行一千四百九十二里，并良、驽二马所行，得三千一百四十里。课于三千里，余有一百四十里，故谓之多也。 以盈不足维乘假令之数，并而为实，并盈不足为法，实如法而一，得日数者，即不盈不朒之正数。以二马初日所行里乘十五日，为十五日平行数。求初、末益疾、减迟之数者，并一与十四，以十四乘而半之，为中平之积。又令益疾、减迟里数乘之，各为减、益之中平里，故各减、益平行数，得十五日定行里。若求后一日，以十六日之定行里数，乘日分子，如日分母而一，各得日分子之定行里数。故各并十五日定行里，即得。其驽马奇半里者，法为全里之分，故破半里为半法，以增残分，即合所问也。"

本问乃是一等差级数问题，但《九章算术》却列入盈不足章，以盈不足算法进行计算；按术文所论，良马逐日所行里数，是一递增等差级数，15 日共行走

$$(15/2)\cdot[193+(193+13\times14)]=4260\ (里);$$

第 16 日应行走 $193+13\times15=388$ (里)。

驽马逐日所行里数，是一递减等差级数，15 日共行走

$$(15/2)\cdot\{97+[97-(1/2)\times14]\}=1420+(1/2)(单位:里);$$

第 16 日应行走 $97-(1/2)\times15=89+(1/2)$(单位：里)。

由于良马先至齐，复还迎接驽马，所以两马应行 $3000\times2=6000$ (里)。若按 15 日计算，两马共行 $4260+[1402+(1/2)]=$

5662+(1/2)(里)。与两马应行6000里相较，得6000−[5662+(1/2)]=337+(1/2)(里)。故曰“不足”。若按16日计算，两马共行(4260+388)+{[1402+(1/2)]+[89+(1/2)]}=6140(里)，与两马应行6000里相较，得6140−6000=140(里)。故曰“多”。

按盈不足术计算，得两马相逢日数为

{15×140+16×[337+(1/2)]}÷[337+(1/2)+140]=15+(135/191)。(单位：日)

在术文中，只有计算两马相逢日数的方法，缺少求其行程的步骤。于是注文乃补其不足。

“益疾”是良马逐日递增的里数，即13里，也就是等差级数之公差。按术文计算良马15日行程为：[193+(13×14)/2]×15=4260里。这一算法，推而广之，则相当于等差级数求和公式：

$$s_n=[a_1+(n-1)d/2]\times n。$$

第16日仅走(193+13×15)×(135/191)=274+(46/191)(里)。将上两数相加，即得良马定行里数。即4260+[274+(46/191)]=4534+(46/191)(里)。显然，在推求第16日仅走算法中，是利用了等差级数的通项公式：即

$$a_n=a_1+(n-1)\times d,$$

其中a_n是第16日一天应走的里数，$a_1=193$是等差级数的首项，$n=16$为天数，$d=13$为“益疾”；最后所乘之分数(135/191)则是第16日一天所用的时间。

“减迟”是驽马逐日递减的里数，即1/2里，也就是等差级数的公差。依术文计算驽马15日行程为：[2×97−(1/2)×14]×(15/2)=1402+(1/2)(里)。这一算法，推而广之，则相当于等差级数求和公式：

$$s'_n=[2\times a'_1-(n-1)d']\times n。$$

第16日仅走[97−(1/2)×15]×(135/191)=63+[49+(1/2)]/191(里)。将上两数相加，即得驽马定行里数。在这一算法中，实

际上是利用了等差级数的通项公式：

即 $a'_n = a'_1 - (n-1) \times d'$，

其中 a'_n 是第 16 日一天应走的里数，$a'_1 = 97$ 是等差级数的首项，$n = 16$ 为天数，$d' =$ (1/2) 为“减迟”；而最后所乘之分数（135/191）则是第 16 日一天所用的时间。

驽马定行里数当为：

$$[1402+(1/2)]+\{63+[49+(1/2)]/191\}$$
$$=1465+\{(1/2)+[49+(1/2)]/191\}$$
$$=1465+\{[95+(1/2)]/191+[49+(1/2)]/191\}$$
$$=1465+(145/191)\text{。（单位：里）}$$

在上式中，奇零分数（1/2），可看作以 191 为分母，以 191 之半为分子的分数，即是“半法”为分子的分数，也就是(1/2)=[95+(1/2)]/191。再以“半法”[95+(1/2)] /191 与“残分”[49+(1/2)] /191 相加，即得（145/191）。因而注文说：“其奇半里者为半法。以半法增残分，即得其不尽者而命分”。这句注文的实际意义就是通分相加的意思。

刘徽除以等差级数的求和公式、通项公式推求良马、驽马所行里数外，还用盈不足术进行推算；并提出计算良马、驽马行程的另一算法。刘徽注说“以二马初日所行里乘十五日，为平行数”。良马“平行数”为 193×15=2895，驽马“平行数”为 97×15=1455；刘徽又说“求初、末益疾、减迟之数者，并一与十四，以十四乘而半之，为中平之积。又令益疾、减迟里数乘之，各为减、益之中平里”。良马“中平里”为(1+14)×(14/2)×13=1365，驽马“中平里”为(1+14)×(14/2)×(1/2)=52+(1/2)；刘徽继续说“故各减、益平行数，得十五日定行里”。

良马 15 日之“定行里”为：2895+1365=4260（里）；

而驽马 15 日之“定行里”为：1455−[52+(1/2)]=1402+(1/2)。（单位：里）

如以 a_1 表示良马初日所行里，以 n 表示良马 15 日之项数，良马"平行数"则为 $n \cdot a_1$，如以 d 表示良马之"益疾"，也即等差级数之公差，则得良马 15 日之"中平里"为 $[1+(n-1)]\times[(n-1)/2]\times d$，故得良马之"定行里"为

$$n \cdot a_1+[1+(n-1)]\times[(n-1)/2]\times d=s_n \quad ;$$

或 $$s_n=n \cdot a_1+[n(n-1)]\times(d/2)。$$

如以 a'_1 表示驽马初日所行里，以 n 表示驽马 15 日之项数，驽马"平行数"则为 $n \cdot a'_1$，如以 d' 表示驽马之"减迟"，也即等差级数之公差，则驽马 15 日之"中平里"为 $[1+(n-1)]\times[(n-1)/2]\times d'$，故得驽马之"定行里"为

$$n \cdot a'_1-[1+(n-1)]\times[(n-1)/2]\times d'=s'_n;$$

或 $$s'_n=n \cdot a'_1-[n(n-1)](d'/2)。$$

刘徽可能分别相加良马、驽马逐日所行而得到上述等差级数求和之算法；即：良马 15 日逐日所行里数之和为：

$$\begin{aligned}&193+(193+13)+(193+13\times 2)+(193+13\times 3)+\cdots+\\&\quad(193+13\times 14)\\&=193\times 15+(1+2+3+\cdots+14)\times 13\\&=2895+(1+14)\times(14/2)\times 13\\&=2895+1365=4260。\end{aligned}$$

驽马 15 日逐日所行里数之和为：

$$\begin{aligned}&97+[97-(1/2)]+[97-(1/2)\times 2]+[97-(1/2)\times 3]+\cdots\\&\quad+[97-(1/2)\times 14]\\&=97\times 15-(1+2+3+\cdots+14)\times(1/2)\\&=1455-(1+14)\times(14/2)\times(1/2)\\&=1455-[52+(1/2)]=1402+(1/2)。\end{aligned}$$

刘徽注文还说："若求后一日，以十六日之定行里数，乘日分子，如日分母而一各得日分子之定行里数。故各并十五日定行里，即得。其驽马奇半里者，法为全里之分，故破半里为半法，以增

残分，即合所问也。”即是推求良马及驽马第16日定行里数。良马第16日定行里为：

$$(193+13\times15)\times(135/191)=274+(46/191);$$

而驽马第16日定行里为：

$$[97-(1/2)\times15]\times(135/191)$$
$$=63+\{[49+(1/2)]/191\}。$$

于是，良马、驽马共行里数分别为：

良马：　$4260+[274+(46/191)]=4534+(46/191);$

驽马：　$[1402+(1/2)]+63+\{[49+(1/2)/191\}$

$=1465+(145/191)。$

通过以上各例证的分析，可以看出《九章算术》及刘徽对等差级数的巨大贡献。尤其是刘徽，不仅创立并使用了等差级数的公差公式、通项公式、两种求和公式，还与列衰算法、锥行衰算法、盈不足算法等构通了关系；并对某些算法适当予以了推广。所可惜的是，刘徽没有对两种求和公式进行适当的讨论，说明两者是等价的；也没有将“益疾”、“减迟”两种公差统一于一起。

第四节　刘徽的其他级数算法及“关税”算法

《九章算术》衰分章第8问为：

今有大夫、不更、簪袅、上造、公士，凡五人，共出百钱。欲令高爵出少，以次渐多。问：各几何？

答曰：大夫出八钱一百三十七分钱一百四；

不更出一十钱一百三十七分钱之一百三十；

簪袅出一十四钱一百三十七分钱之八十二；

上造出二十一钱一百三十七分钱之一百二十三；

公士出四十三钱一百三十七分钱之一百九。

术曰：置爵数各自为衰，而返衰之，副并为法。以百钱乘未

并者，各自为实。实如法得一钱。

根据刘徽注，知大夫、不更、簪袅、上造、公士原爵数为5、4、3、2、1，按术文，其“衰”当为5∶4∶3∶2∶1，其“返衰”则为：

(1/5)∶(1/4)∶(1/3)∶(1/2)∶(1/1)，

而“返衰”之和为

(1/5)+(1/4)+(1/3)+(1/2)+(1/1)

=(24/120)+(30/120)+(40/120)+(60/120)+((120/120)

=(274/120)=(137/60)，

以此和作为法数，以100钱分别乘以未并者，作为实数；实数除以法数，则得大夫、不更、簪袅、上造、公士各人应出之钱数：

大夫出： 100×(1/5)÷(137/60)=8+(104/137)；

不更出： 100×(1/4)÷(137/60)=10+(130/137)；

簪袅出： 100×(1/3)÷(137/60)=14+(82/137)；

上造出： 100×(1/2)÷(137/60)=21+(123/137)；

公士出： 100×(1/1)÷(137/60)=43+(109/137)。

从表面上看，这一问虽是一道衰分或返衰问题，但实质上是涉及调和级数的问题。由于中国古代对调和级数的研究不多，所以《九章算术》及刘徽在这一问题上未能充分地有所发挥。

在《九章算术》均输章第27、28问为：

(27) 今有人持米出三关，外关三而取一，中关五而取一，内关七而取一，余米五斗。而本持米几何?

答曰：十斗九升八分升之三。

术曰：置米五斗。以所税者三之，五之，七之，为实。以余不税者二、四、六相乘为法。实如法得一斗。

在术文之下，刘徽注称：

“此亦重今有术也。所税者谓今所当税之本三、五、七皆为所求率，二、四、六皆为所有率。置今有余米五斗，以七乘之，六

而一，即内关未税之本米也。又以五乘之，四而一。即中关未税之本米也。又以三乘之，二而一，即外关未税之本米也。今从末求本，不问中间，故令中率转相乘而同之。亦如络丝术。”

刘徽注又称：

“又一术：外关三而取一，则其余本米三分之二也。求外关所税之余，则当置本持米，二乘之，三而一，欲知中关，以四乘之，五而一。欲知内关，以六乘之，七而一。凡余分者，乘其母子，以三、五、七相乘得一百五，为分母；二、四、六相乘得四十八，为分子。约而言之，则是余米于本所持三十五分之十六也。于今有术，余米五斗为所有数，分母三十五为所求率，分子十六为所有率也。”

(28) 今有人持金出五关，前关二而税一，次关三而税一，次关四而税一，次关五而税一，次关六而税一。并五关所税，适重一斤。问：本持金几何？

答曰：一斤三两四铢五分铢之四。

术曰：置一斤，通所税者，以乘之为实。亦通其不税者，以减所通，余为法。实如法得一斤。

在术文之下，刘徽注称：

“此意犹上术也。置一斤。通所税者，令二、三、四、五、六相乘为分母七百二十也。通其所不税者，谓令所税之余一、二、三、四、五相乘为分子一百二十也。约而言之，是为余金于本所持六分之一也。以子减母，凡五关所税六分之五也。于今有术，所税一斤为所有数，分母六为所求率，分子五为所有率。此亦重今有之义。又虽各有率，不问中间，故令中率转相乘而连除之，即得也。置一以为持金之本率，以税率乘之、除之，则其率亦成积分也。”

在这两问中，都属于“关税”问题，所谓“税者”，即是所课税的钱数；如第27问之“三而取一”、“五而取一”、“七而取一”，

其中“3”、“5”、“7”，都是“税者”；而所税之余，如“三而取一”之余为3－1＝2，“五而取一”之余为5－1＝4，“七而取一”之余为7－1＝6；都称为“不税者”。也即3、5、7为“税者”，而2、4、6为“不税者”。仿此，第28问之“二而取一”、“三而取一”、“四而取一”、“五而取一”、“六而取一”，其中“2”、“3”、“4”、“5”、“6”都是“税者”；“二而取一”之余为2－1＝1、“三而取一”之余为3－1＝2、“四而取一”之余为4－1＝3、“五而取一”之余为5－1＝4、“六而取一”之余为6－1＝5，都是“不税者”。

第27问之余米5斗，所问“本持米数”，按术文及刘徽注计算，则得

本持米数＝余米数×(税者之积)÷(不税者之积)，

也即

本持米数＝5×(3×5×7)÷(2×4×6)＝(109＋3/8)(升)。

第28问之“五关所税，适重一斤”，所问为“本持金数”，按照术文及刘徽注计算，则得

本持金数＝所税共数÷［1－(不税者之积)/(税者之积)］，

也即

本持金数＝1÷［1－(1×2×3×4×5)/(2×3×4×5×6)］
＝(1＋1/5)(斤)。

一般说来，设若所税之后余物数为m，每次所税分别为“a而取a'”，“b而取b'”，“c而取c'”，……，“d而取d'”，按术计算，则得

本持物数$=m\times(a\times b\times c\times\cdots\times d)\div[(a-a')(b-b')(c-c')\cdots(d-d')]$

设若所税共数为n，每次所税分别为“a而取a'”，“b而取b'”，“c而取c'”，……，“d而取d'”；按术计算，则得

本持物数$=n\div[1-(a-a')(b-b')(c-c')\cdots(d-d')/(a\times b\times c$

$\cdots\times d)]$。

综上所述,《九章算术》及刘徽不但研究了各种级数的有关问题,尤其对等差级数的研究克臻佳境,而且对等差级数的乘积,也进行了研究,从而形成所谓“关税问题”。所可惜的是,《九章算术》及刘徽对“关税问题”的研究没能得到进一步的深化和发展。

第四章　刘徽的代数理论特色

在讨论刘徽的代数理论特色之前，首先应当指出：在中国传统数学中，本质上并不存在代数与几何的严格区分。在绝大多数场合，二者是结合在一起的，这两方面的问题、方法以及相关的概念交织在一起，成为独具特色的中国传统数学理论体系中引人注目的特征。为了方便，我们按照今天的习惯分别讨论刘徽在几何方面与代数方面的成就，并且沿用中国数学史界早已习惯的说法，将《九章算术》与刘徽处理问题的一些方法描述为“用代数方法处理几何问题”、“对代数问题给予几何解释”，但这并不意味着古人首先对二者作出了划分然后又用属于某一领域的方法处理另一领域的问题。明确这一点，才不致失去中国传统数学的本来面目。

第一节　刘徽代数理论的逻辑结构

《九章算术》中可以归入代数学范围的内容主要包括开方、线性方程组、等差及等比级数。此外，虽然人们通常将盈不足术归入算术范围，但《九章算术》及刘徽对有关问题的处理实在包含了十分明显的代数学因素。对这些内容，书中给出了相应的基本问题、公式、法则和解题过程，但对其理论依据却未作说明，对所涉及的基本概念也未加定义。刘徽的工作从本质上改变了这种状况，不仅使中国传统代数学的理论化程度大为提高，也为其进一步发展奠定了基础。

一、定义

刘徽改变了以往数学名词约定俗成的惯例，对《九章算术》和他本人所用的重要词汇均予定义，逻辑严谨，含义明确，为严格的演绎论证创造了前提。与代数理论有关的定义虽然不多，但颇为重要，包括开方、开立方、方程、列衰等。

开方。《少广》章“开方术”注：“（开方：）求方幂之一面也。”“术或有以借算加定法而命分者，虽粗相近，不可用也。凡开积为方，方之自乘当复还其积分。令不加借算而命分，则常微少；其加借算而命分，则又微多，其数不可得而定。故惟以面命之，为不失耳。”

开立方。《少广》章“开立方术”术注：“（开立方：）立方适等，求其一面也。”

方程。《方程》章“方程术”注：“程，课程也。群物总杂，各列有数，总言其实。令每行为率。二物者再程，三物者三程，皆如物数程之。并列为行，故谓之方程。行之左右无所同存且为有所据而言耳。”

衰分、列衰。《衰分》章“衰分术”注：“衰分，差分也。”“列衰，相与率也。重叠则可约。”

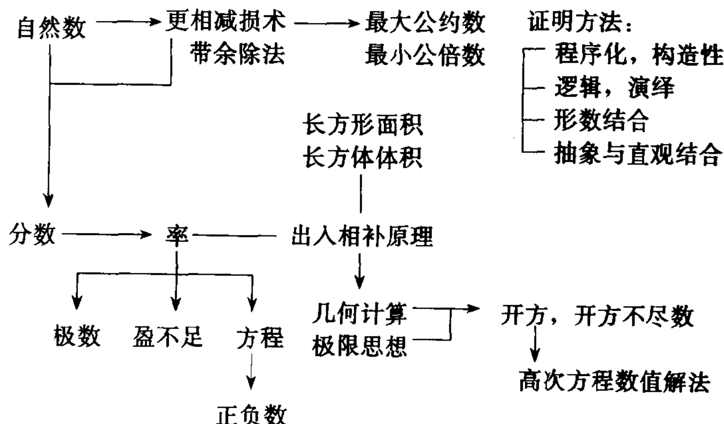
可以看出，刘徽的上述定义是以自然数的概念与四则运算、率概念、长方形面积、长方体体积为基础建立的。我们还知道，率是通过数定义的。因此可以认为，自然数、面积、体积是刘徽代数理论的原始概念，从中也显示了数与形、代数与几何在中国传统数学中的内在联系。

二、证明

如前所述，《九章算术》的代数内容主要包括开方、线性方程组、等差及等比级数，主要结果有开方术、开立方术、方程术，以及衰分、均输两章的一些具体结果。刘徽从自然数的四则运算、比

率变换原理、长方形面积、长方体体积、“出入相补”原理等基本法则和原理出发，一一给出证明和理论分析。在作为论证前提的上述内容中，比率变换原理以更相减损术为基础，后者又是建立在自然数基本性质上的。因此可以认为，自然数的性质与四则运算、长方形面积、长方体体积、出入相补原理是刘徽代数理论的原始命题。

刘徽在《九章算术》注原序中指出：“事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本干者，知发其一端而已。又所析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黩，览之者思过半矣。”可见，揭示数学对象的统一性与逻辑关联、抽象与直观结合、形数结合是刘徽数学理论研究的基本原则，它们在代数学的理论研究中同样得到了充分的体现。由于遵循了这些原则，刘徽的证明有着清楚的逻辑顺序，重要而基本的问题都得到了深入研究，没有发生逻辑循环和一般的逻辑错误。更为突出的是，虽然他的工作受到为书作注在体例上的限制，但如果根据证明的逻辑关系将有关结果排列出来，我们将得到下图：



可以看出，在与代数理论直接相关的部分，比率理论及出入相补原理明显地处于核心地位。也就是说，刘徽的代数学理论体

系是以数与形的概念和性质为基础，以比率理论及出入相补原理为核心，以形数结合、抽象与直观结合、构造性与逻辑演绎结合为基本方法建立起来的，它们构成了刘徽代数理论的基本特征，并且与中国传统数学的总体特征完全吻合。

第二节 形数结合

形数结合是中国传统数学的基本方法与思想，也是刘徽代数理论的基本特征之一，我们在上一节已从整体上指出了这一点，本节将结合“开方术”注与“开立方术”注进行具体的分析与讨论。

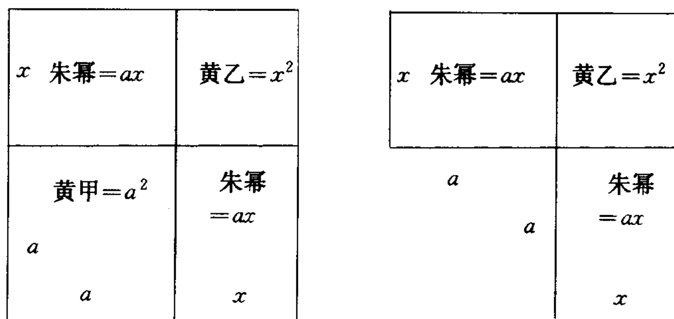
在今天看来，已知一个矩形的边长求它的面积是几何问题，已知它的面积反求其边长则是代数问题（开方、解方程）；然而在《九章算术》及其刘徽注中，它们被看作一类问题的两个方面，在概念与方法上都是相通的。刘徽对《九章算术·方田》章章名所作解题为“以御田畴界域”，对《九章算术·少广》章章名所作解题为“以御积幂方圆”，明确指出这两章的内容分别是由长度求面积与由面积（以及体积）求长度，而开方术与开立方术正是《九章算术·少广》章的核心内容，这两条术文的名称又恰好表明了它们的几何背景。就字义而论，“少广”即广少而从（即“纵”）多，“少广术”实际上就是已知长方形的面积及其一边之长，求另一边之长的算法。根据刘徽注，开方是“求方幂之一面也”，所谓“开方术”，就是已知正方形的面积，推求其一边之长的算法。因而开方术则可视为少广术的一种特殊情形，开立方术”则可看作是“开方术”的推广，“开圆术”是“开方术”的一项实际应用，“开立圆术”则是“开立方术”的一项实际应用。数与形的概念与方法在这里有机地结合在一起。

开方是典型的数值计算问题，其数学实质是解方程。刘徽在数学研究中强调“析理以辞，解体用图”，即分析道理依靠逻辑论

证，阐发几何对象使用各种图形。将这一原则运用于开方，便使之成为形数结合思想的范例。

在《九章算术·少广》章“开方术”注中，刘徽首先解释开方为：“求方幂之一面也”。也就是说，开方相当于由正方形的面积推求其一边之长。类似地，在“开立方”下刘徽注称：“立方适等，求其一面也”，是说开立方相当于推求正方体的一棱之长。

在“开方术”注中，刘徽以几何意义及面积理论对开方运算逐句解释，详见本编第一章，其原理如下图。



正方形F

计算A的平方根，相当于已知正方形F面积等于A而求其边长。

设$N=(a+x)^2$。如果已经求得a的值，为计算x，如图在F中去掉正方形黄甲（a^2），所余为二朱幂（$2ax$）和一黄乙（x^2），即

$$x^2+2ax=A-a^2。$$

逐步对x试商即可最终求得A的平方根。开方术由高位数值逐位求到低位数值，与几何的分割步骤相对应，它既是以中算家独创的十进位值制记数法为基础的，也反映了中算家关于线段度量的观念①。

① 李继闵.《九章算术》及其刘徽注研究. 西安：陕西人民教育出版社，1990，97

在“开立方术”注中，刘徽以几何意义及体积理论对开立方运算逐句解释，详见本编第一章，其原理与开方术类似，相当于已知正方体 C 体积等于 V 而求其棱长，所涉及的关系为：

$$V=(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3,$$

$$x^3+3ax^2+3a^2x=V-a^3。$$

容易看出上式中各项的几何意义，这也正是刘徽所说明的。由于立体情形较为复杂，尽管刘徽已经对立方体的分割情况作了详细的说明，仍特别指出：“言不尽意，解此要当以棋，乃得明耳。”即若要把开方过程解释得更清楚，最好是使用立体模型。

《九章算术·勾股》第20问是一个一元二次方程问题，原题如下：“今有邑方不知大小，各中开门。出北门二十步有木。出南门十四步，折而西行一千七百七十五步见木。问：邑方几何？”“答曰：二百五十步。”“术曰：以出北门步数乘西行步数，倍之，为实。并出南门步数为从法，开方除之，即邑方。”刘徽同样根据几何意义解释此题造术：“此以折而西行为股，自木至邑南十四步为勾。以出北门二十步为勾率，北门至西隅为股率，即半广数。故以出北门勾率乘西行股，得半广股率乘勾之幂。然此幂居西半。故又倍之合东半以尽之也。”“此术之幂，东西广如邑方，南北自木尽邑南十四步为袤。合南北步数为广袤差，故并两步数为从法，以为隅外之幂也。”

在中国传统数学中，许多典型的算术与代数方法（如比率算法、高次方程数值解法）在几何学领域广泛应用，而几何学的原理与方法又被成功地用于代数、数论等领域，例如整勾股数一般公式、垛积术都源于几何。此外，从现传最早的关于三次方程的专著、唐初王孝通《缉古算经》，直到12世纪天元术创立以前，建立代数方程时一直要求对各项系数给出几何解释，而这一传统正是从刘徽开始的。在建立二次及三次方程时，这种形数结合的方法是颇具启发意义的，尤其是在缺乏适当的代数符号的情况下，借

助几何意义建立代数方程和对解题过程提供解释几乎可以说是一条必由之路。但是，随着数学问题的渐趋复杂特别是代数方程次数的提高，再去借助几何意义建立方程和描述解题过程已经日益困难。直到北宋贾宪等人才完全脱离开方的几何直观，而从二项式系数找出数值规律，创立了可开任意高次幂的“增乘开方法”，并由南宋秦九韶发展为可求任意一元高次方程数值解的一般方法，金元时期的数学家们则创立了设立未知数以建立一般代数方程的“天元术”。至此，传统代数学终于超越《九章算术》与刘徽而达到了新的境界。

第三节 代数的构造性与程序化

中国传统数学本质上是一种构造性数学，表现为以算为主，寓理于算，理论高度精炼，数学对象及结果基本上均可由固定的演算程序经有限步骤得到，各种计算均依固定的演算程序进行，发展起一套程序化、机械化的算法体系，其代表作是《九章算术》。

《九章算术》全书的主要结果基本上都是按构造性与程序化的标准建立的，各章的分类与具体问题及结果的排列顺序也在一定程度上反映了这些内容间的数学内在关联。但一般说来，书中只是给出了各种计算法则与过程，对其正确性及理论上的严格性却未作讨论。固然，由于中国传统数学的构造性特点，所有结果都是构造性地产生的，其存在性似乎本不成问题，但是，即使像约分术这样较为简单和基本的算法，为什么用更相减损术求得的等数就是更相减损开始时二数的最大公约数，结论也不是显然的。至于像开方术、方程术这些复杂的计算程序正确与否，单凭直观就更不足以判断了。为保证《九章算术》算法体系在理论上的正确性与严格性，刘徽做了大量工作。他在《九章算术》原序中写道：“事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本干者，知发其一端而已。

又所析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黩，览之者思过半矣。"《九章算术·方程》章第 18 问刘徽注："夫数犹刃也，易简用之则动中庖丁之理。故能和神爱刃，速而寡尤。凡《九章算术》为大事，按法皆不尽一百算也。虽布算不多，然足以算多。"从这些论述中不难看出刘徽算法理论的基本原则：正确，简捷，统一，高效。这些原则代表了以算法为其主要特征的中国传统数学理论体系的根本追求。

一、对《九章算术》原有算法的理论性说明

《九章算术·少广》给出的开方程序具有十分普遍的意义，即其原理对开任意 n 次方及求任意 n 次方程的正根都是一致的，但书中没有对这一算法的有效性进行理论论证。在"开方术"注和"开立方术"注中，刘徽以几何意义及面积、体积理论对《九章算术》给出的算法程序逐句作了解释。

《九章算术·方程》给出的方程术，是用"直除法"（本质上与今天所说的加减消元法一致）解一般线性方程组的完整算法。刘徽在注文中对于"方程"的定义、原理给予深刻而明确的论述。例如他指出："举率以相减，不害余数之课也。"这就是说，两方程对应相减，并不破坏新方程与原方程的同解性，这是因为方程两端加减同一数，所得新方程与原方程同解。这就为"直除法"提供了理论依据。他又说："先令右行上禾乘中行，为齐同之意。为齐同者，谓中行上禾亦乘右行也。从简易虽不言齐同，以齐同之意观之，其义然矣。"方田章合分术下刘徽注称："凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同。"刘徽一方面给予"齐同"的定义，一方面又推广了"齐同"的意义，并应用于"方程术"中。在这里，刘徽认为：欲消去整系数方程首项时，须以一方程首项系数乘另一方程，两方程首项系数相乘则称为"同"；一方程首项系数乘另一方程其他个项则称为"齐"。所以刘徽认为"右行上禾乘中行"，即

是“齐同”的意思。这就将方程理论提高到“齐”、“同”、“通”的观点。

二、通过算法证明计算法则的正确性

割圆术是刘徽对中算几何理论的重要贡献之一，而从算法理论的角度看，它又是刘徽独创的一个十分精彩的算法。通过这一算法，他不仅证明了《九章算术·方田》章所列圆面积与圆周长公式的正确性，计算出了更为精确的圆周率，更为后世对这类问题的进一步研究奠定了理论基础。刘徽从圆内接正6边形起算，一直算到圆内接正192边形，其基本步骤是：

$$r_{3\times 2^n}=\sqrt{R^2-1/4(a_{3\times 2^n})^2},$$
$$d_{3\times 2^n}=R-r_{3\times 2^n},$$
$$a_{3\times 2^{n+1}}=\sqrt{(d_{3\times 2^n})^2+1/4(a_{3\times 2^n})^2},$$
$$S_{3\times 2^{n+2}}=3\times 2^n\times(a_{3\times 2^{n+1}}\times R)。$$

实际上，取 $R=1$，从 $a_6=1$ 开始，根据上述递推公式可以方便地依次计算出 $n=0$，1，2，…时相应的 $S_{3\times 2^{n+2}}$的值。

三、建立和推广算法，以简化原有算法或得到新的数学结果

在《九章算术·少广》章中，刘徽不仅以几何意义及面积、体积理论对《九章算术》给出的开平方及开立方算法程序逐句作了解释，而且对开方至个位仍有余数的情形明确指出：“不以面命之，加定法如前，求其微数。微数无名者，以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母。退之弥下，其分弥细，则朱幂虽有所弃之数，不足言之也。”刘徽在这里指出，对畸零小数的开方运算与处理整数部分的算法是完全一致的，而且这一运算过程可以不受限制地以循环的方式任意进行下去，直到求出令人满意的近似值，这实际上是以极限的观点对《九章算术》开方算法的推广。

在衰分章、均输章的注文中，刘徽不仅创立了等差级数的公差公式、通项公式、两种求和公式，还与列衰算法、锥行衰算法、盈不足算法等沟通了关系，并对某些算法适当作了推广。

《九章算术·方程》给出的线性方程组解法是所谓“直除法”，在此基础上，刘徽提出解法的理论依据和有确切解的条件，并创立了几种新的解法。

在方程章第7问术文之下，刘徽注称：“假令为齐同，头位为牛，当相乘左右行定。更置右行，牛十、羊四、直金二十两；牛十、羊二十五、直金四十两。牛数等同，金多二十两者，羊差二十一使之然也。以少行减多行，则牛数尽，惟羊与直金之数见，可得而知也。”刘徽不但创造了互乘对减法，从而提高了解题效率，而且改变了“直除法”的单一计算技巧。他还明确指出：“以小推大，虽四、五行不异也”，也就是说，互乘对减法对于求解一般的线性方程组是普遍有效的。

在方程章第9问之后，刘徽还对“一雀一燕交而处，衡适平”作出前后联想的说明：“按此四雀一燕与一雀五燕其重等，是三雀四燕重相当，雀率重四，燕率重三也。诸再程之率皆可异术求之，即其数也。”这里用比率的观点对方程组提出新的解法，并且说明所有的二元一次方程组均可用“异术”（即他创造的方程新术）求解。

《九章算术·方程》章“方程术”刘徽注：“用算繁而不省，所以别为法，约也。”此处所说的“别为法”，是指他在《九章算术·方程》章第18问之下创造的“方程新术”。其演算过程是：在给定的线性方程组中保留一行（称为减行）不变，首先消去其余各行的常数项，再消去其他各项，直到每行中只有两未知项，而且是一正一负时为止（因为当时考虑的问题所有的根均为正数），然后移项，易为两数相当之率，最终求得每两未知数的相当之率，从而化成同一未知数，然后代入减行，即可确定一个未知数的值。

然后由每两未知数的相当之率即可求得其他各未知数的值。当线性方程组未知数个数较多时，根据具体问题灵活地选用《九章算术》“方程术”或刘徽“方程新术”，可以使解题过程大为简化，这正是刘徽创造“方程新术”的初衷。

第四节　刘徽代数理论的模型化

以问题为中心、以算法为基础，主要依靠归纳思维建立数学模型，强调基本法则及其推广，是《九章算术》与刘徽数学思想的精髓。中国传统数学最本质的方法是归纳，认识过程是由特殊到一般，数学知识是针对具体的对象，通过观察、操作、比较、分析的过程，然后归纳、概括的产物。中国传统数学的实用性，要求数学研究的结果必须能对各种实际问题进行分类，对每类问题给出统一的解法；以归纳为主的思维方式和以问题为中心的研究方式，倾向于建立基本问题的结构与解题模式，一般问题则被化归、分解为基本问题解决；由于中国传统数学未能建立起一套抽象的数学符号系统，对一般原理、法则的叙述一方面是借助文辞，一方面是通过具体问题的解题过程加以演示，使具体问题成为相应的数学模型。根据今天的观点，数学模型是对现实世界的某一特定对象，为某个特定目的，做出一些必要的简化和假设，运用适当的数学工具，描述和揭示对象的某些特征，得到一个数学结构。它或者能解释特定现象的现实性态，或者能预测对象的未来状态，或者能提供处理对象的最优决策或控制。数学模型按其性能一般分为三类：产生于具体的实际问题的应用性模型，从应用性模型抽取其相同数学特征而得的概括性模型，对大量概括性模型中共同的数学本质再进行概括和抽象而形成的抽象性模型。从总体上说，现代所说的数学模型是可以用来解决具体问题的抽象结构，而所谓中国古代的数学模型则是用以揭示一般方法的具体

问题与解题模式，接近于现代的应用性模型，二者表面上虽不一致，但本质上是相通的。

在归纳思维、注重实用、注重基本原理的思想指导下，模型化的思想与方法在《九章算术》及其刘徽注中得到了广泛的运用。《九章算术》共收入 246 个数学问题，分属九章，可以看作九大类基本问题。每题大致由问（问题）、答（答案）、术（解题方法或过程）三部分组成，以具体问题及其解法为模型，揭示与说明一般原理、法则及其应用。这些问题，有的独立地对应于某一原理或法则，有的表现了同类问题的各种不同情形。书中的“术”共有 202 条，有的一题一术，构成一个完整的数学模型；有的多题一术，从不同侧面揭示同一原理法则，构成统一的模型；有的一题多术，体现了问题的多侧面和解法的灵活性。例如，为了说明线性方程组的一般解法，《九章算术・方程》以一个涉及三种稻子产量的问题为模型，通过具体的数值计算揭示一般方法。对此，刘徽在注文中明确指出这个问题及其解法的模型性质：“此都术（即一般法则）也，以空言难晓，故特系之禾以决之。”

在基本模型和算法建立后，刘徽注重原理的概括性和理论的统一性，注重算法的推广与相互关联，认为掌握了基本原理和方法就掌握了数学的实质，因而在数学研究过程中对它们给予了极大的关注，称之为“算之纲纪”，典型的有算术中的整数四则运算与比率变换原理，代数中的开方术和线性方程组解法等。具体而巧妙的解题方法也受到推崇，刘徽本人就是一题多解的能手，但这必须以对基本原理和方法的充分理解为前提。刘徽在《九章算术注》原序中提出：“事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本干者，知发其一端而已。”《九章算术・方田》章“合分术”刘徽注：“乘以散之，约以聚之，齐同以通之，此其算之纲纪乎”；《九章算术・粟米》章“今有术”刘徽注：“凡九数以为篇名，可以广施诸率，所谓告往而知来，举一隅而三隅反者也。”又如《九章算术・

方程》章“正负术”刘徽注明确指出了正负数加、减法则在线性方程组解法中的统一性：“遂以二条反复一率，观其每与上下互相取位，则随算而言耳，犹一术也。”

与原理的高度概括性和方法的高度统一性相对应，刘徽明确地反对生搬硬套，强调数学方法的简洁性与灵活运用，针对各种不同情形推广一般法则，或者将简单方法推广到复杂情形。《九章算术·方程》章第18问刘徽注：“其拙于精理徒按本术者，或用算而布毡，方好烦而喜误，曾不知其非，反欲以多为贵。故其算也，莫不暗于设通而专于一端。至于此类，苟务其成，然或失之，不可谓要约。更有异术者，庖丁解牛，游刃理间，故能历久其刃如新。夫数犹刃也，易简用之则动中庖丁之理。故能和神爱刃，速而寡尤。”《九章算术·均输》章第10问刘徽注：“凡率错互不通者，皆积齐同用之。仿此，虽四五转不异也。”《九章算术·方程》章第7问刘徽注：“以小推大，虽四五行不异也。”

第五节　刘徽代数理论的位置性

现代数学最主要的外在特征是符号化，准确地理解和正确地运用数学符号是数学教育的基本要求之一。从历史上看，数学（特别是代数学）的表述方式最初都是文辞式的，即对问题及其解的表达不用缩写和符号，而是写成一篇论说文。当数学发展到一定阶段，其表述方式也随之发展，主要有两类模式：使用表音文字的文化系统（希腊，印度，欧洲）对某些较常出现的量和运算采用了缩写的方式，通常是取相应单词的第一个或前几个字母，最终形成了今天通用的数学符号体系；使用表意文字（即所谓象形文字）的文化系统（以中国为代表）倾向于发展位置式的表述。符号式与位置式这两种表述方式，直接的和表层的原因是受到相应文字形式的影响，而在深层的意义上说，则是体现了这两类文明

在思维方式上的区别，前者侧重于抽象思维，后者侧重于形象思维。还应当指出，数学的表述方式并不仅仅是一种记法，它对数学思维的模式与过程都是有影响的。

汉字与西方的表音文字截然不同，它的基础是象形，它的进一步发展，是形旁、音旁的搭配与位置组合。因此，汉字有着天然的形象性与位置性。与之相适应，位置思想在中国传统数学的筹式演算体系中从一开始就占据着核心地位，数学计算、推演均以位置化的筹式演算体系中从一开始就占据着核心地位，数学计算、推演均以位置化的筹式演算为中心，表现为较单一的数字阵变换。其优点是方便、直观、富有启发性，《九章算术》在算术与代数方面的主要成就如分数理论、比例理论、盈不足术（双假设法）、开方术、线性方程组，无一例外地打上了位置思想的印记。刘徽不仅充分认识和把握了这一基本特点，而且在注文中多处对位置思想在《九章算术》有关算法中的运用及其地位作了精辟的分析。

在《九章算术·少广》章“开方术”术文“借一算步之，超一等”一语下，刘徽注称：“言百之面十也，言万之面百也。”意思是说借取一枚算筹，用以定位；如果被开方数是百位上的数，其平方根就是十位上的数；如果被开方数是万位上的数，其平方根就是百位上的数。其中“等”，就是数位的意思，“超一等”就是在移动算筹时，每次超越一个数位，相当于现在笔算开平方中的分节。在开立方术术文“借一算步之，超二等”下，刘徽注称：“言千之面十，言百万之面百”。与前类似，只是改为每次超越两个数位，相当于现在笔算开立方中的分节。在这里，位置思想的运用是明显而关键的。

刘徽代数理论的位置性特点更多地体现在他的线性方程组理论中。由于所有情形都十分明显，这里以选录刘徽的有关注文为主，除必要时作简要的解释外，一般不再另加分析。

“方程术”“以右行上禾遍乘左行而以直除”下刘徽注：“为术之意，令少行减多行，反覆相减，则头位必先尽。上无一位则此行亦阙一物矣。……若消去头位则下去一物之实。”术文“又乘其次，亦以直除”下刘徽注：“复去左行首”。术文“然以中行中禾不尽者，遍乘左行而以直除”下刘徽注：“亦令两行相去行之中禾也。”术文“左方下禾不尽者，上为法，下为实。实即下禾之实”下刘徽注：“上、中禾皆去，故余数是下禾实，非但一秉。欲约众秉之实，当以禾秉数为法。列此，以下禾之秉数乘两行，以直除，则下禾之位自去矣。各以其余一位之秉除其下实，即斗数矣。”《九章算术》原术的演算过程相当于先将线性方程组的系数矩阵化为一个下三角阵，其运算过程明显地依赖于位置概念，刘徽对这一特点更是详加说明。

正负术：“正负术曰：同名相除，异名相益，正无入负之，负无入正之。”刘徽注：“今两算得失相反，要令正负以名之。正算赤，负算黑。否则以邪正为异。方程自有赤黑相取，左右数相推求之术。而其并减之势不得广通，故使赤黑相消夺之。于算或减或益，同行异位，殊为二品，各有并减之差，见于下焉。著此二条，特系之禾以成此二条之意。故赤黑相杂足以定上下之程，减益虽殊足以通左右之数，差实虽分足以应同异之率。”正负术：“其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之。”刘徽注：“此条异名相除为例，故亦与上条互取。凡正负所以记其同异，使二品互相取而已矣。言负者未必负于少，言正者未必正于多，故每一行中虽复赤黑异算无伤。然则可得使头位常相与异名。此条之实兼通矣。遂以二条反复一率，观其每与上下互相取位，则随算而言耳，犹一术也。”

《九章算术·方程》章第 4 问刘徽注：“按正负之术，本设列行物程之数不限多少，必令与实上、下相次，而以每行各自为率。然而或减或益，同行异位殊为二品，各自并减之差见于下也。”

刘徽“方程新术”：“方程新术曰：以正负术入之。令左右相减，先去下实，又转去物位，求其一行二物正负相借者，易其相当之率。又令二物与他行互相去取，转其二物相借之数，即皆相当之率也。各据二物相当之率，对易其数，即各当之率也。更置减行及其下实，各以其物本率今有之，求其所同，并以为法其当相并而行中正负杂者，同名相从，异名相消，余以为法。以下实为实。实如法，即合所问也。一物各以本率今有之，即皆合问也。率不通者齐之。”

综上所述，刘徽在《九章算术》的基础上，全面、系统地为中国传统的代数学奠定了理论基础，发展了一系列算法，阐明了许多重要的代数学思想，使作为一个算法体系的传统代数学的基本精神得到发扬、光大，为此后中国传统代数学长达千年的高度发达作了充分的准备。

第五编

刘徽在算术理论方面的贡献

刘徽除在几何、代数等方面做出贡献外，在算术方面也取得重要成就。本编主要论述他在数系、率、整勾股数、盈不足术与合作问题等属于算术方面的贡献。“今有术”将放在率中，做为率的一类重要内容，而不单列章节。

第一章　刘徽在数系方面的贡献

数是数学中最基本的概念。数概念的扩充标志着数学的巨大飞跃。一个时代人们对于数的认识与应用，以及数系理论的完善程度，反映了当时数学发展的水平。

各民族对数的认识都从自然数开始。原始的自然数概念产生于对什物的点数，且先于数字符号，随着数目的增大，计数则有赖于必要的工具与科学的方法。中国古代以算筹为工具，很早就发明了十进位位值制记数法。中算家从比率概念出发发展了分数理论；由“方程”算法程序化的需要而引进了正负数；从开方不尽导致无理根数的出现。早在《九章算术》中，事实上已将数的范围扩充到了实数系。刘徽注关于数的论述，可称为是对中国古代数系理论的全面总结。

第一节 刘徽对分数的论述

一、分数的概念

分数概念源于度量单位的细分，古文字中的半（料、㪷）、参、㕛作为古汉字中单分数之数词，曾是专用量名①。《九章算术》的分数概念则是从除法运算引进的。合分术曰："实如法而一。不满法者，以法命之。"② 所谓"命之"即"命分"，这句话可译为："被除数除以除数，如果不能除尽，便定义了一个分数"。乘分术刘徽注则云："凡实不满法者而有母子之名。"不仅指明《九章算术》的分数定义由除法运算引进，而且还揭示了古代分数限于"以法为母，实余为子"的特点，即分子是除之不尽的剩余部分，它恒小于分母。换言之，中算家所谓分数，一般皆指"余分"，乃小于1的真分数。通常的有理数被表示为整数部分及其余分，整数部分称为"全"或"完"。只有在运算过程中，才"母乘全内子"将整部化为"积分"与余分相通而合并，相当于现今的化带分数为假分数。

我国古代分数概念的一个重要特色表现在分数概念具有两重性：分数作为测量或运算的结果，它是一个独立的数；而在筹算的推演过程中，它实质上是被看作法与实一对（整）数的比率。李约瑟早就注意到了这一点。他说："在《九章算术》中，分子和分母在运算前称作子和母，在运算中则称作实和法。"③ 刘徽正是基于这一特点而用比率的性质论证分数的性质与四则运算。也正因

① 李继闵．中国古代的分数理论，《九章算术》与刘徽．北京：北京师范大学出版社，1982，190～120

② 本编所引《九章算术》及刘徽的《九章算术》注原文皆出自：李继闵．《九章算术》校证．西安：陕西科学技术出版社，1993（以下不再一一注明。）

③ 李约瑟．中国科学技术史（中译本），第三卷．北京：科学出版社，1978，178

为中算家的分数概念的独特性，筹算中分数的记法亦无固定形式。其母与子作为比率，它们的相对位置或上下，或左右，随宜而定。

二、分数的性质

《九章算术》提出了分数的基本性质为：分子、分母同乘以或同除以一不为零的数，其值不变。刘徽将这一基本性质概括为分数的两条变形规则：

(1)“乘以散之”，

(2)“约以聚之”。

约分术刘徽注云：

“分之为数，繁则难用。设有四分之二者，繁而言之，亦可八分之四；约而言之，则二分之一也。虽则异辞，至于为数，亦同归尔。”

他在合分术注中又说：

“约而言之者，其分粗；繁而言之者，其分细。虽则粗细有殊，然其实一也。众分错杂，非细不会。乘而散之，所以通之。”

这里刘徽指出同一分数的表示可以有繁、约之不同。若分子、分母同时缩小同一倍数，所得分数的表示形式则为“约”，分数的单位变大，变粗，即“约以聚之”。若分子、分母同时扩大同一倍数，所得分数的表示形式即为“繁”，分数的单位变小，变细，即“乘以散之”。这两变形都不改变分数的值，“至于为数，亦同归尔”，“其实一也”。

刘徽的以上论述，实际上是把分数定义为具有以下基本性质的数对$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$或$(a, b)$：

对于任意的数c $(c\neq 0)$，有

$$\begin{pmatrix} a\times c \\ b\times c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{或} (a\times c, b\times c)=(a, b) \text{及}$$

$$\begin{pmatrix} a\div c \\ b\div c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{或} \ (a\div c,\ b\div c)=(a,\ b)$$

且具有分数的保值变形规则：

(1) 约分：$\begin{pmatrix} ac \\ bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 或 $(ac,\ bc)=(a,\ b)$；

(2) 散分：$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac \\ bc \end{pmatrix}$ 或 $(a,\ b)=(ac,\ bc)$。

三、齐同术与数量间的“相与通同”

刘徽已有将数分类的思想。所谓同类数，是指用同一度量单位（即“法”）所得之数，只有同类数才能用以比较大小和相从相消。如合分术刘徽注称：

“方以类聚，物以群分。数同类者无远，数异类者无近。远而通体者，虽异位而相从也；近而殊形者，虽同列而相违也。”

说的正是同类数才能比较和加减的道理。从分数的原始意义来看，分母是“法”的标志，自然把同分母分数划归一类。所以刘徽注说：“同者，相与通同，共一母也。”将凡能构成比的数（即“率”）叫做彼此相通，即“率者，自相与通”。同类数可以相比，因而也是相通的。对于分数，同分母分数之比等于其分子之比，即分母相同则分子相通。化异分母为同分母的分数运算称为通分，通分目的就在于使“母同则子通”。

通分的方法被刘徽概之以“齐同以通之”，齐同术最初就是通分的方法。合分术刘徽注云：

“众分错杂，非细不会。乘而散之，所以通之。通之则可并也。凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同。同者，相与通同，共一母也；齐者，子与母齐，势不可失本数也。”

刘徽指出，通分的理论依据在于分数的变形规则“乘以散之”。通分运算包括两步，一是使诸分数的分母同一，通过群母相乘得到，

称为“同”；二是使各分数保持不变，通过母互乘子而得，称“齐”。同是为分数相通；齐是保证“势不可失本数”。

刘徽又提出了另一种齐的方式：

“其一术者，可令母除为率，率乘子为齐。”

即用各分数的分母除“同”而得各分数的率，用此率分别乘各分子，即得“齐”。这种方法在三个以上分数相加时比原方法简便，如 $b_1/a_1+b_2/a_2+b_3/a_3$，同为 $a_1a_2a_3$，各分数的率便是 a_2a_3、a_1a_3、a_1a_2，直接用它们分别乘以 b_1、b_2、b_3 就得到相应的齐：$b_1a_2a_3$、$a_1b_2a_3$、$a_1a_2b_3$。

总之，齐同术也是一种分数的保值变形规则：

齐同：$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_ik_i \\ B \end{pmatrix}$ 或 $(a_i,\ b_i)=(a_ik_i,\ B)$ 其中，$B=\prod_1^n b_i$，$k_i=B/b_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

齐同术更一般的意义是，为使数量相通，率之全体在“不失本率”条件下的变形法则。这一点在下一章里还要讨论。

有了上述三种分数的等量变换法则：约以聚之，乘以散之，齐同以通之，进行分数的四则运算即可顺理成章。而以上所引刘徽关于三种变换的论述乃分别在《九章算术》的分数四则运算术文中给出。

第二节　刘徽对正负数的论述

著名数学史家尤什凯维奇曾高度赞扬了我国古代数学家首先引进正负数概念的伟大意义：

“在《九章算术》第八章中，破天荒第一次在科学史上看到了正量与负量的区分。……

负量及负量运算法则的发明是大约生活在二千年以前或更早的中国学者的最伟大成就。这是第一次越过了正数域的范围。中

国数学家在这一点上超出了其他国家的科学几世纪之久。"①

一般中算史论著都将正负数概念的产生释为得自现实生活中具有相反意义的量。这样的解释不能令人信服。事实上，各民族各地区的先民都会在现实中接触到相反意义的量，为什么唯独中算家就破天荒地引进了正负数？近来有研究者通过深入研究"方程"章有关刘徽注，提出正负数概念得自解"方程"的程序化算法。②

一、正负数的引入

中国古代筹算以筹布式，依术推演，既无运算符号，也不保留中间过程，但规定一套程序化的算法。这种算法的模式化与程序性，使得筹算具有算法的机械化特点。

古代中算家为了解决类似现今所谓线性方程组的问题，便将有关数据按一定的规则排列成为一个数码方阵，称之为"方程"，并规定了一套类似于现在所谓矩阵初等变换的算法。特别地，要在"方程"中进行两行之间的相加相减，而要保证这种机械化的算法能畅行无阻，就必须引进负数和建立正负数的运算法则。刘徽"方程"章正负术注深刻地说明了这一点：

"今两算得失相反，要令正负以名之。正算赤，负算黑，否则以邪正为异。方程自有赤黑相取，法实数相推求之术，而其并减之势不得广通，故使赤黑消夺之。于算或减或益，同行异位，殊为二品，各有并减之差，见于下焉。著此二条，特系之禾以成此二条之意。故赤黑相杂足以定上下之程，减益虽殊足以通左右之

---

① A. П. 尤什凯维奇. 中国学者在数学领域中的成就. 数学进展，第2卷(1956)，第2期，第256～278

② 李继闵. 东方数学典籍《九章算术》及其刘徽研究. 西安：陕西人民教育出版社，1990，115～120

数，差实虽分足以应同异之率。然则其正无入负之，负无入正之，其率不妄也。”

古代筹算表示正负数有两种方式：一是以算筹颜色区分，正数用红色，负数用黑色；二是以算筹的形状区分，正数的截面为三角形，负数的截面为正方形。

“方程自有赤黑相取，法实数相推求之术”。是说红黑二色算筹是用于“方程”的布列及其左右行数值的相互推求。“自有”，自者，自然、当然之意；自有即自然有，强调其必不可少。而“方程”算法非要用正负数不可的原因就在于“方程”的布列与相互推求两方面。

其一，在左右行数值相互推求时，“其并减之势不得广通，故使赤黑相消夺之”，即方程两行间同位之数互有大小，彼此相消时不可避免地会出现以小减大而不够减的情形，不引入正负数，则方程的两行相消便不能通行无阻。如“方程”章第3问：

今有上禾二秉，中禾三秉，下禾四秉，实皆不满斗。上取中，中取下，下取上各一秉而实满斗。问上、中、下禾实一秉各几何？

依题设，当有“方程”如下：

	左	中	右
上禾	1		2
中禾		3	1
下禾	4	1	
实	1	1	1

其左、中、右三行皆有空位而他行同位非空。因此，任何两行相消都会遇到以正数减零的情形，这在正数范围内是无法进行的。

其二，在布列“方程”时，需“赤黑相杂”方“足以定上下之程”。按刘徽所给“方程”定义：

“群物总杂，各列有数，总言其实，令每行为率。”

“方程”的每一竖行应按顺序从上到下排列出各物及总实的数值。若仅限于正数，当题设以损益之说为问时，便无法列出“方程”来。如“方程”章第4问：

今有上禾五秉，损实一斗一升，当下禾七秉。上禾七秉，损实二斗五升，当下禾五秉。问上、下禾实一秉各几何？

依题意当列“方程”如下：

	左	右
上禾	7	5
下禾	−5	−7
实	25	11

可见，按中算家的“方程”布列法，只有允许各位之数可正可负才能扩大“方程”解决应用问题的范围。

值得指出的是，如不采用中算家的“方程”布列原则及机械化算法来列和解线性方程组问题，未必要引进负数。事实上，公元9世纪的阿拉伯数学家阿尔·花拉子模在其《代数学》中就利用所谓的“对消”或“还原”等方法使方程各项系数总是正数，并避免了消元时出现负数以及减数可能大于被减数的情形。①

二、正负数的定义

刘徽对正负数的定义有精辟的论述：

“凡正负所以记其同异，使二品互相取而已矣。言负者未必负于少，言正者未必正于多，故每一行之中虽复赤黑异算无伤。”刘徽认为，正与负是相对的。称为负的未必就是少，称为正的也未必就是多。所以称之为正与负，不过是为了区分具有相反意义

① M. 克莱因. 古今数学思想，第一册（中译本）. 北京：北京大学出版社，1979，218～220

的量，使它们可以互相取用而已。在“方程”的一行中赤黑互易于算无妨。

刘徽注中还给出正负数的一个数学定义：

“今两算得失相反，要令正负以名之。”

增加为得，减损为失。所谓“两算得失相反”，是说运算时增加一枚黑筹等同于减少一枚红筹，减少一枚黑筹等同于增加一枚红筹。这用现代术语来说即加负等于减正，减负等于加正。用这种方法定义的正负数已同时包含了它的加减运算法则。

关于正负术，刘徽注还指出：

“益行减行当各以其类矣。其异名者，非其类也。非其类者，犹无对也，非所得减也。故赤用黑对则余黑，黑无对则余赤，赤黑并于本数。”

在前节中我们看到，刘徽曾以分母为标准将数分类，这里他又以正负之名将数分类，同名之数为同类。则“方程”两行之数相加减当是同类数相加减，异名之数的加减，犹如加数或减数无所应对。便不能得以施行。这个道理在古筹算中是直观易懂的。如以负减正，按筹算规则即是要从若干红筹中取出若干黑筹，犹如要从空位中取出若干黑筹，无法实现。而正负之数可“两算得失相反”，取出黑筹可化为添加红筹，于是矛盾得以解决。其中“赤用黑对”“黑无对”分别表示“以正减负”及“以负减正”，而“本数”则相当于今之“绝对值”。

刘徽正负术注成功地用化异类为同类的道理说明了《九章算术》的正负数运算法则。

第三节　刘徽对某些无理数的逼近描述

无理数的存在，无论在古代的希腊还是中国，都很早就被发现了。不过，东西方是通过不同的途径来认识和发展无理数理论

的。

一、刘徽对无理数的论述

关于中算家对无理数的认识水平，学界的评价不一。如钱宝琮曾批评刘徽没有能够把一些数学理论系统化，致使与有些在理论上有重要意义的推论“失之交臂”。其中例证就有刘徽对无理数的认识问题，说刘徽“没有说明开不尽的平方根与它的近似值有所区别，无理数与有理数有不同的范畴”。①

顾今用则指出我国古代先民“创造与发展了从记数、分数、小数、正负数以及无限逼近任一实数的方法，实质上达到了整个实数系统的完成”②。李继闵于1986年提出《九章算术》开方术“以面命之”就是“将这个不能用分数表示的新数称之为‘面’”③，1989年又撰文进一步论证中算家早在汉代业已引进无理根数④。

开方术刘徽注云：

“术或有以借算加定法而命分者，虽粗相近，不可用也。凡开积为方，方之自乘当还复其积分。令不加借算而命分，则常微少；其加借算而命分，则又微多。其数不可得而定。故惟以面命之，为不失耳。譬犹以三除十，以其余为三分之一，而复其数可举。”

李继闵指出，刘徽这段话包含着三层意思：

一是“开方”的意义，开方即是开积为方，所求之方应是这样的数，其自乘当等于被开方数（即积）；二是“加借算”或“不加借算”命分，所得分数都不是所求之方，都有误差，都是方的

---

① 钱宝琮．钱宝琮科学史论文选集．北京：科学出版社，1983，297～607

② 顾今用（吴文俊）．中国古代数学对世界文化的伟大贡献．数学学报，第18卷（1975）第1期，第19页。

③ 中外数学简史编写组．中国数学简史．济南：山东教育出版社，1986，153

④ 李继闵．刘徽关于无理数的论述．《西北大学学报》自然科学版，1989（1）：1～4

近似值；三是只有规定一个新数称之为“面”，才不会产生误差。这正如同在除法运算中，除之不尽时要“命分”一样。例如，10 ÷ 3＝3……余 1，只有将余数命为 1/3，才能用乘法还原：(3＋1/3)×3＝10。除之不尽而“命分”，开之不尽而“命面”，由运算引进新数，这是中算家于数系扩展的深刻思想，为刘徽阐发得如此透彻。

李继闵还给出了刘徽注中引东汉张衡有关“面”的三处例证的分析，其中“面”与现代数学中所谓“方根”为同义语。

一曰“质六十四之面，浑二十五之面”，即立方体与其内切球体积之比为$\sqrt{64}:\sqrt{25}$，也就是 8∶5；二曰“方八之面，圆五之面”，即方幂比圆幂为$\sqrt{8}:\sqrt{5}$；三曰“圆周率一十之面，而径率一之面也”，即圆周比圆径为$\sqrt{10}:\sqrt{1}$。

上述观点在学界引起较大反响，但此前此后都有不同的意见。

李国伟最近著文批评上述观点乃对中国古算过分高度乐观。他认为：《九章算术》开方术的程序执行到个位数算出时便停止，若起始的数是平方数，则答案确实是该数的平方根。所谓“开之不尽”则指程序停止时，“实”的部分不空，还没有涉及任何无限步骤的“不尽”。只要把平方数由小到大枚举出来，虽然易见太多的数不是平方数，因此有能力明白说出存在“开方之尽”的状况并不稀奇。如果起始数为 n，开方的目的是求以 n 为面积的正方形的边长（即其面），既然 n 不是平方数，只好叫这条边长为“n 之面”，这就是“以面命之”的本意。而刘徽的“开方术注”只是阐明有人用“借算加定法”的带分数当做平方根是不精确的。其求微数法只算到没有单位名字之后的一二位，至于这个程序在“不足言”之后，是否永远可以再继续下去，刘徽没有说任何话，可

能他并不在意这里面是否潜藏着一个重大分水岭。①

以上正反两方面的意见都承认了这样一个史实，即中算家从开方的几何意义出发，当被开方数n“开之不尽”时，自然地称其方根为“n之面”，翻译成现代符号即$\sqrt{n}$。

这里涉及到了东西方古代先哲数量观的分歧。古希腊人从线段不可公度的几何角度发现了无理数的存在。但是，由于希腊人受毕达哥拉斯学派关于数的观念的束缚，而走向了数量割裂的路线。李约瑟对希腊人的无理数概念即有如下评论：

“希腊的传统（如普罗克卢斯（Proclus）所说）是毕达哥拉斯学派发现了正方形的边和对角线的不可通约性，这也就是对$\sqrt{2}$的无理性的几何看法。希腊人关于无理数的概念是某个数不能表示为两个整数之比。这不是“无理”，而是“不可比”。”②

总之，希腊人之所以说$\sqrt{2}$这类数“无理”，是因为他们坚持“数”只能是自然数或两个自然数之比的哲学信条。

中国古代传统的数量观念，认为数来自客观世界，是客观事物量的表现，是实际度量的结果。中算家把数与几何量的统一看成理所当然的，从来不怀疑会不会有线段的长度不能用一个“数”来表示。《后汉书·律历志上》有“古人论数”曰：

古之人论数也，曰：“物生而后有象，象而后有滋，滋而后有数。”然而天地初形，人物既著，则算数之事生矣。记称大桡作甲子，隶首作数。二者既立，以比日表，以管万事。夫一、十、百、千、万，所同用也；律、度、量、衡、历，其别用也。故体有长短，检以度；物有多少，受以量；量有轻重，平以权衡；声有清浊，协以律吕；三光运行，纪以历数。然后幽隐之情，精微之变，

① 李国伟.《九章算术》与不可公度量. 自然辩证法通讯，1994（2）：49～54

② 李约瑟. 中国科学技术史，（中译本）第三卷. 北京：科学出版社，1978，199～200

可得而综也。

古人认为，“数”产生于大千世界。天地万物，有形有象，增长变化，于是就有了数。形体有长短，要用“度”来察验；实物有多少，要用“量”来表示；质量有轻重，要用“权衡”来测准；声音有清浊，要用“乐律”来协调；日月星辰的运行，要用历法来推算。这些都离不开“数”。所以说律、度、量、衡、历的应用乃是“个别的”，而一、十、百、千、万的应用则是“共同的”。万物都有其数，数又反过来表示一切物件的测度结果。

从这种数量统一的观念出发，开不尽的方根就没有什么“无理”之处，它就是某个具有确定面积的正方形的边长。如刘徽“开立圆术注”称：

“按如衡术，方周率八之面，圆周率五之面也。令方周六十四尺之面，即圆周四十尺之面也。又令径一尺，方周四尺，自乘得十六尺之面，是为圆周率一十之面，而径率一尺之面也。”

将这段文字译成现代数学语言即是：

设有圆及其外接正方形，圆径=1尺，有

$$方周：圆周=\sqrt{8}:\sqrt{5}=\sqrt{64}:\sqrt{40};$$

$$径：方周=1:4=\sqrt{1}:\sqrt{16}=\sqrt{1}:\sqrt{64/4}。$$

从而

$$径：圆周=\sqrt{1}:\sqrt{40/4}=\sqrt{1}:\sqrt{10}。$$

可见，张衡把可开尽的方根与开不尽的方根都视为可运算的数而不加区别。

古人对除之不尽的数命“分”，我们说他们定义了分数，而当他们对开之不尽的数的命“面”，且又能将其“面”作为数来运算，我们又为什么不能说他们定义了新数——“无理根数”呢？大概就是因为有理数与无理数之间存在着“有限”与“无限”的分水岭。

我们注意到刘徽在“开方术注”的论述：

“凡开积为方，方之自乘当还复其积分。令不加借算而命分，则常微少；其加借算而命分，则又微多。其数不可得而定。故惟以面命之，为不失耳。”

实质已给出了“方”（即方根，亦面）的定义：“方”者，其自乘等于“积”之数也。当被开之“积”不是平方数时，方根是不能用一个分数来确定的，只有用“面”表示此方根才是准确值（为不失耳）。刘徽又创立了“求微数”方法，用十进分数近似逼近方根。那么，由十进小数计算容易知道，任何小数的自乘是不能得到一个整数的，它只能是一个小数位数更多的数。因而根据以上刘徽给“方（根）”所下的定义，即可判断一个整数若开不尽有奇零时，它是不能用有限小数来表示其方根的。这并非一个在刘徽所处时代不可认识的问题。

综上，我们认为中国古代数学家所实际运用的数系已包括了“无理根数”在内，是不争的事实。至于现代意义的实数理论本来就是 19 世纪数学的产物，中国古代数学家那里没有，古希腊人也没有。

二、刘徽的求微数法及其意义

刘徽的求微数法是古代对无理方根认识的又一重大贡献。刘徽注中论及此法者有三处：方田章“圆田术注”，少广章“开方术注”和“开立方术注”。为探讨刘徽注所论求微数法的意义，我们先从中算家开方运算之造术谈起。

开方，“求方幂之一面也”。这里“开”是动词，分开之意。开方，即分割方形；这个名称即表明了此算法的几何来源，它是由对方形的逐次分割来求其边长的。刘徽开方术注正是用图形的分割来说明开方术程序的数学原理。它是将方幂分割为一个内方和若干个“矩”（曲尺形），它们的宽度恰好表示方幂一边长度在各

"位"上的数值。这种由高到低逐位相求，本质上相当于以十进位制的不同单位去度量该方形之边长，这与日常生活中用丈、尺、寸、分为单位依次去度量线段长度是完全相通的。即相当于用 10^2 为单位度量 2 次，用 10^1 为单位度量 3 次，用 10^0 为单位度量 5 次。量之不尽时，取原单位的 1/10 为新单位继续度量。

对于任一正整数 n，开方目的是求以 n 为面积的正方形的边长。设被开方数为"n 尺",[①] 当程序进行到个位结束而实位非空时，刘徽就或称所求的这条边为"n 之面"，或依开方程序的几何原理，用 1/10 尺、1/100 尺等单位继续度量，求其"微数"。刘徽注曰：

"不以面命之，加定法如前，求其微数。微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以百为母。退之弥下，其分弥细，则朱幂虽有所弃之数，不足言之也。"

尺下有寸、分、厘、毫、秒、忽等单位，皆十退。忽以下单位不再有专名，刘徽就引进了十进分数概念。即开至忽以下而实位仍然非空，可继续开之。第一次"退位开之"所得之数作为分子，以 10 为分母；第二次退位再开之时，则以 100 为分母，以此类推。"退之弥下，其分弥细"。刘徽的十进分数与十进小数意义相近，具有重要意义。小数从"有名"到"无名"则是微数取位逐渐增加的必然趋势[②]。换言之，刘徽发明十进分数实际上是他逼近无理根数思想的自然产物。而在筹算中分数记法的子母位置灵活，且可寄母不置，因而十进分数的置法可等同于十进小数，不

---

① 这里被开方数"n 尺"之"尺"是指面积的测度值，而非长度单位。关于中国古代面积、体积单位命名的意义请参见：王荣彬，李继闵．中国古代面积、体积度量制度考．汉学研究，1985，13（2）：159～167

② 我国古代度量衡制度中分位以下，都是先有算家理论推算精密化需要引入的，后来才逐渐被应用于实际。参见：吴承洛．中国度量衡史．上海：上海书店（影印本），1984，91

过他没有像16世纪的笔算家斯台文等人那样，引入“小数分隔码”。

对刘徽是否认识到无理根数的存在质疑的重要依据就是这里的“则朱幂虽有所弃之数，不足言之也”，认为这句话表明刘徽此举只不过是一个近似计算，而不是一个无限过程。我们则注意到以下两点：

其一，我们知道我国古代筹算的鲜明特色就是其算法的机械化，古算术文往往就是一个机械化算法的程序指令。开方术亦不例外。刘徽注指出这个程序命令进行到个位方根开出而实仍非空时，可依法继续退位开之，且“退之弥下”，近似程度越好；退至相当位以后，其误差可忽略不计了。但刘徽此处是在对一个计算程序注解，一个机械程序是不可能令其无穷无尽地进行。涉及无穷的问题在当时还处在思辨的阶段。正如刘徽在阳马术注中所说：“数而求穷之者，谓以情推，不用筹算”。而此处是在“筹算”，而非情推”。

其二，刘徽是否意识到这种计算可永远继续下去，则应从他对方根的定义：“凡开积为方，方之自乘当还复其积分”入手分析。正如我们前面指出的那样，开之不尽中算家既已认识到可用小数去近似而任一小数的自乘又不可能是一个整数，这并非是一个艰深而不可逾越的障碍。

希腊人用逻辑上的归谬方法洞悉不可公度量存在，固然是一个聪明而成功的途径，但不是唯一的途径。中算家方法的直接且简捷，在发现无理根数存在性上所表现的睿智相比之下毫不逊色！

总之，中算家的开方术本质上与其线段的度量理论相通。从运算的观点看“开之不尽”而“以面命之”，是为使开方运算得以施行而引入新数。其实，从几何的观点来看，“以面命之”即是在量之不尽时引进新数来表示线段（即正方形的边）的长度。刘徽注的求微数法不仅表明开方术与长度度量的本质联系，而且展示

出以十进分数无限逼近实数的深邃思想。

事实上，由连续的几何量的度量而产生实数，这正是实数系产生的实际背景。

刘徽注中涉及到求微数法的还有以下两处。

其一，"开立方术"注有云："术亦有以定法命分者，不如故幂开方，以微数为分也"。刘徽注指出，开立方与开平方类似，不尽立方根也有定法加借算或不加借算而命分的近似分数表示，同样这种表示不如退位开方以十进分数表微数的办法精确。查《九章算术》开立方术文中在"开之不尽者，亦为不可开"之后，没有"当以面命之"的话，或许在《九章算术》成书时中算家还未对开之不尽的立方根给予专门术语。但刘徽注则指出，开立方的情形完全可类似于开平方来处理。

其二，"圆田术注"有云："……七十五寸，开方除之，下至秒忽，又一退法，求得微数。微数无名者以为分子，以十为分母"。是说割圆术计算过程中的开方运算采用求微数法。刘徽依其割圆术求圆周率时，要多次用到开方，都是开方不尽且位数多至十二三位。正是由于他用求微数法实际进行了开方运算，才可能将圆周率精确到 3.1416 的较好结果。

第二章　刘徽在比率方面的贡献

中国古代数学长于计算，其中心课题是寻求应用问题的一般解。这就要从最基本的数量关系出发，建立一套相应的算法。中算家所考虑的基本数量关系即比率关系，不仅他们的分数算法以比率为理论基础，而且中算家还依据比率关系构造出今有、衰分、盈朒、“方程”、重差等各种演算程序。

中算家的这种比率理论与西方和现代比例算法不同。在《九章算术》时代，比率论是以量与量间的关系为研究对象，其量是可以按照一定规律变化的；比率又是具有高度概括力的，以齐同术作为全部理论的基础。总之，比率论是贯穿《九章算术》算学理论体系的一条主线；是算法之“纲纪”。诚如刘徽所言：“凡九数以为篇名，可以广施诸率”。因此，不弄清率的概念及其应用这个纲，就无法弄清中国古算的本来面目。

第一节　刘徽对比率及其性质的论述

通览《九章算术》刘徽注，其中表现出了试图以率的概念与方法来建立统一数学理论之明显倾向。刘徽对率的论述代表了当时中算家对数量关系认识所达到的水平。在数学史上，存在着一个“比率就是一切”的时代。例如《隋书·律历志上》备数篇有云：

事物糅见，御之以率，则不乖其本。故幽隐之情，精微之变，可得而综也。

夫所谓率者，有九流焉：一曰方田，以御田畴界域；二曰粟

米，以御交质变易；三曰衰分，以御贵贱廪税；四曰少广，以御积幂方圆；五曰商功，以御功程积实；六曰均输，以御远近劳费；七曰盈朒，以御隐杂互见；八曰方程，以御错糅正负；九曰勾股，以御高深广远。皆乘以散之，除以聚之，齐同以通之，今有以贯之。则算数之方，尽于斯矣。

但是，从先秦到《九章算术》，“率”之概念则靠约定俗成，没有明确界定，其完整的数学定义则由刘徽给出。

一、率的定义

经分术刘徽注云：

“凡数相与者谓之率。率者，自相与通。有分则可散，分重叠则约也。等除法实，相与率也。”

此注包含以下四层意思。

其一，“凡数相与者谓之率”。这句话在于说明率是什么，属于定义的外延。“相与”，在古代有两种含义，一是相关，如《周易》：“二气感应以相与。”《左传·昭公三年》：“叔向从之宴，相与语。”《墨子·经下》：“一法者之相与也尽类。”皆相关之义。二是共同，如《左传·昭公二十九年》：“相与偕出。”此处取相关之义，是说凡是一组相关的数量它们都叫做“率”。这里所谓的“相关”，限于数量成比例变化的相依关系。例如，圆周长与直径是一对“相与”之数，故称为周率与径率；彼此相交换的粟、粝米、粺米、……等数量，是一组“相与”之数，故称为粟率、粝率、粺率、……所谓“凡数相与者谓之率”，质言之，是说凡用来表示相比关系的数就称之为率。

其二，“率者，自相与通。”强调作为一组率的诸数间的相比对应关系。“通”，贯通，由此至彼，中无阻隔。粟率五与粝率三相通，原始的意义是粟五粝三相当，彼此可交易。引伸之义为粟五与粝三相对应。周率三与径率一相通，自然是说周长为三时对

应的径是一。"通"则是"可比"、"对应"的意思。率者，自相与通，译成现代数学术语即用来表示率的一组数必定是诸可比量的一组对应值。

其三，"有分则可散，分重叠则约也。"指出率的基本属性，乃率概念的内涵。即一组相应的率表示为一组比数，若其中有分数则可同乘以一数而去分母；若各数有公因子则可除以一数而约简，换言之，作为一组率，可以同乘或同除以一（不为零的）数。

其四，"等除法实，相与率也。"法和实，原为除数与被除数，在此泛指一组相关的率。等，即等数，最大公约数。进一步说明，当表示率的一组比数有公因子需约简时，可用等数去约简它们，所得将是一组互素的正整数表示的率——相与率。

刘徽论"率"，常常是与"数"或"势"相提并论的。如

凡数相与者谓之率。（经分术注）

使干丝以两数为率，生丝以斤数为率。（生丝干丝术注）

转其二物相借之数，即皆相当之率也。（方程新术）

对易其数，即各当之率也。（方程新术）

可见，刘徽注强调了率是数的称谓，数有时就是率。查算经中率皆用具体的数来表示，故刘徽注本当用率的地方也有用数来代替。如合分术注"齐者，子与母齐，势不可失本数也。"这里"势不可失本数"与所谓"势不失本率"无疑同义。但是，率不是数的同义语，并非任何的数都可称之为率，能称之为率的是"数之相与者"，数只有被视为量的相比时才能称它们为率。质言之，率是描写数量关系的。

二、势字的含义

刘徽多次使用"势"字，"势"已成为中算的一个重要概念。刘徽《九章算术》注中的"势"字皆可释为"关系"，而进一步的考察发现，注文中的"势"多与比率有关，也就是说，"势"多指

数量间的“相比关系”。试举例分析如下

幂图方在勾中，则方之两廉各自成小勾股袤，而其相与之势不失本率也。（勾股容方术注）

角而割之者，相半之势。（羡除术注）

是为别种而方者率居三，通其体而方者率居一。虽方随棊改，而固有常然之势也。（阳马术注）

然则余高自乘，即外三棊之断上幂矣。不问高卑，势皆然也。（开立圆术李淳风注）

夫叠其成立积，缘幂势既同，则积不容异。（开立圆术李淳风注）

所谓“其相与之势不失本率”，是说这些数量间的相比关系保持着固定不变的比数；所谓“相半之势”，即指各占其半，一比一的比率关系；所谓“虽方随棊改，而固有常然之势也”，是说尽管长方体的长宽高三度有变化，但仍然保持固定的比率关系；所谓“幂势既同”，即指截面的数量关系处处相同。总之，以上所举各例，势无一例外地可释为数量间的（相比）关系。

刘徽注中未见对势的意义加以界说。按“势”，原为形势，情势之意，含有状态的意思。刘徽将由一组率所确定的比率关系称之为“势”，与现今用一组坐标表示一个状态或方向不无相似之处。

在古代，算家把比率看成一切是自然的。《九章算术》及刘徽注中反映出宇宙之内，天地人物，似乎无一不是比率关系：天圆地方，而圆、方以三、四为率；物物交换，以率相通；得禄出税，依爵次衰分，而列衰，相与率也；徭役摊派，均而输之，而均输者，以行道日约户数为衰，乃衰分之别术也；形与形间，以率相关，圆台之于方台，圆方之率也。虽然在《九章算术》盈不足问题中，算家已经遇到了数量间更为复杂的（高次与超越）“关系”，但他们都毫不例外地当作比率关系去处理了。下一节将进一步介绍。

在刘徽的观念中，表征事物性态的数量关系“势”，是用“率”来刻划的；而“率”则是用“数”来表示的。例如，中算家的勾股比率论，就是用势来描述勾股形的形状关系，“势同”即是图形相似；而勾股的“势”又是由勾率与股率所构成；勾率与股率最终则要用数来表示，如勾率三、股率四等等。刘徽以率言势，以数表率，把数、率、势三者的联系与区别，在注中通过实例的应用，准确地表达出来。这种从数量关系的高度来阐发率概念的本质，反映出极为深邃的数学思想。

三、比率的齐同

刘徽注云：“率者，自相与通”。特别强调比率的“相通”。两数构成比率，称之为相通，而多个数构成的连比，称之为大通。如刘徽粟米之法注云：

“凡此诸率相与大通，其特相求各如本率。”

是说粟米章首列二十种不同品种和质量的谷物之数，任何两个都可取作彼此交换的比率。

然而，实际问题中又往往会遇到比率错互不通的情形，这就需要通过齐同术使之化为相通。由率的定义和性质，刘徽提出了它的三种保值变换：“约以聚之，乘以散之，齐同以通之。”这三种保值变换又都源于分数运算。分数的分母不同就无法施行加减，需要通分。通分的做法包括两步：一是使诸分的分母同一，通过诸分母相乘实现，即为同；二是使各分数值保持不变，通过母互乘子得到，称为齐。刘徽说：

“凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同。同者，相与通同共一母也；齐者，子与母齐，势不可失本数也。”

齐同术更一般的意义是，为使数量相通，率之全体在“不失本率”条件下的变形规则，化错互不通之率为相通之率。以刘徽“均输”第10问注文为例说明之。题曰：

今有络丝一斤为练丝一十二两；练丝一斤为青丝一斤十二铢。今有青丝一斤，问本络丝几何？

刘徽注云：

“一曰，又置络丝一斤两数与练丝十二两，约之，络得四，练得三，此其相与之率。又置练丝一斤铢数，与青丝一斤十二铢约之，练得三十二，青得三十三。亦其相与之率。齐其青丝、络丝，同其二练，络得一百二十八，青得九十九，练得九十六，即三率悉通矣。”

是说，络、练相与之率为（4，3）；练、青相与之率为（32，33）。此时练之二数3与32不同，因而络与青之数4与33就并不相当，络、练、青三率“错互不通”。若用32遍乘（4，3），得络、练之率（128，96）；用3遍乘（32，33），得练、青之率（96，99）。便得络、练、青相与大通之三率为（128，96，99）。这种算法便是所谓的“齐同术”。齐同术是率的最基本的算法，是率之所以成为“算之纲纪”的基础。正如刘徽所说：

“方以类聚，物以群分。数同类者无远，数异类者无近。远而通体者，虽异位而相从也；近而殊形者，虽同列而相违也。然则齐同之术要矣，错综度数，动之斯谐，其犹佩觿解结，无往而不理焉。乘以散之，约以聚之，齐同以通之，此其算之纲纪乎。”

第二节　刘徽把比率视为算法的核心

前面我们提到，《九章算术》及刘徽注把比率看成是处理一切问题的有效方法，这与率被定义为一个十分广泛的数学概念相一致。它不仅被概括了成比例变化的量，而且在盈不足、“方程”诸术中都可以“广施诸率”，被视为算法的核心。

一、今有术

今有术是比率理论通向应用的桥梁。刘徽称：

“此都术也。凡九数以为篇名，可以广施诸率，……因物成率，审辨名分，平其偏颇，齐其参差，则终无不归于此术也。”

这里，刘徽指出今有术是古算中广泛应用的普通法则。其应用的要旨是，首先找出事物间的比率关系，分清其中的所有数、所求率和所有率，然后按今有术公式计算所求之数：

$$\text{所求数}=\frac{\text{所求率}\times\text{所有数}}{\text{所有率}}。\tag{2.1}$$

关于此法的由来，刘徽注以粟、粝互换为例，作了两种解释。

其一，刘徽说：

“故为率者必等之于一。据粟率五、粝率三，是粟五而为一，粝米三而为一也。欲以粟为粝米者，粟当先本是一。一者谓以五约之，令五而为一也。讫，乃以三乘之，令一而为三。如是则率等于一，以五为三矣。然先除后乘或有余分，故术反之。”

按刘徽之意，以粟换粝可由两步来实现。首先，将粟数化为若干个交换的单位“一”(先本是一)，即是

$$\text{粟数}\div\text{粟率}=\text{若干（价值）单位}。\tag{2.2}$$

然后，将交换单位再化为粝米数，即有

$$\begin{aligned}\text{粝米数}&=\text{单位数}\times\text{粝率}\\&=(\text{粟数}\div\text{粟率})\times\text{粝率}。\end{aligned}\tag{2.3}$$

但是，先除后乘可能遇到除不尽的麻烦，故改为：

$$\text{粝米数}=\frac{\text{粟数}\times\text{粝率}}{\text{粟率}}。$$

其二，刘徽说：

“又完言之，知粟五升为粝米三升。分言之，知粟一斗为粝米五分斗之三。以五为母，三为子。以粟求粝米者，以子乘，其母报除也。”

是说，粟率与粝率，用整数来表示（完言之），就是粟5、粝3；而

用分数来表示（分言之），便是粟1、粝3/5。于是

$$粝米数=3/5\times粟数=(3\times粟数)/5。\qquad (2.4)$$

这种解释显然是依据率的基本性质而得：

设x与y是成比例而变化的量（即率），其一组相应的率值为(x_1, y_1)，求当$x=x'$时所对应的y'之值。由率的基本性质，有

$$(x_1, y_1)\xrightarrow{以x_1遍除}(1, y_1/x_1)\xrightarrow{以x'遍乘}(x', y_1\cdot x'/x_1),$$

即

$$y'=y_1\cdot x'/x_1。\qquad (2.5)$$

二、衰分与均输

在《九章算术》中，除粟米章外，衰分、均输等章亦是专讲用比率概念与方法解决各种应用问题。

衰，依照一定的标准递减之意，《左传·襄公二十五年》："且昔天子之地一圻，列国一同；自是以衰"。所谓"衰分"，刘徽注："差分也"。意在衰分与均分不同，是有差别的分配，即现今的按比例分配。它与阶级社会中依爵次高低而按不同等级的分配制度有关。分配所依据的比例称为"列衰"。

从衰分章诸题来看，其列衰并不限于递减，更不要求等差，而是按任意给定的一组比率分配。刘徽注云：

"列衰，相与率也。重叠，则可约。"

说明列衰实际上是列出一组相关的比数，把衰分术归结到今有术。刘徽注曰：

"法集而衰别。数本一也，今以所分乘上别，以下集除之，一乘一除适足相消，故所分犹存，且各应率而别也。于今有术，列衰各为所求率，副并为所有率，所分为所有数。又以经分言之，假令甲家三人，乙家二人，丙家一人，并六人，共分十二，为人得二也。欲复作逐家者，则当列置人数，以一人所得乘之。今此术先乘而后除也。"

刘徽此注包含三层意义。其一，说明衰分式中"法"与

"衰"的关系。所谓"法集而衰别",是说在衰分式中,上方各行所列之"衰",表示各别所分之率,而下方的"法"乃表示被分之总和。其二,说明衰分与今有两术的关系。衰分可以说是多个今有之复合。其中列衰各为所求率,副并为所有率,所分为所有数。所以说,衰分本质上仍是今有之术,不过更为复杂而已。其三,说明衰分与均分的关系。刘徽以甲、乙、丙三家人数各不相等为例,说明若按人均分,则逐家所分便为衰分;因而衰分是均分的演变,按个体的均,则与按集体的衰分相通。可见,衰分含有加权平均的意思。

与上述衰分意义相对有返衰术。《九章算术》的算法是将返衰转化为衰分来处理,但原术文字简约而费解,刘徽对此作了详细的注释:

"以爵次言之,大夫五、不更四。欲令高爵得多者,当使大夫一人受五分,不更一人受四分,人数为母,分数为子。母同则子齐,齐即衰也。故上衰分宜以五、四为列焉。今此令高爵出少,则当使大夫五人共出一人分,不更四人共出一人分,故谓之返衰。人数不同,则分数不齐,当令母互乘子,母互乘子则'动者为不动者衰'也。亦可先同其母,各以分母约其同,为返衰。副并为法,以所分乘未并者各自为实,实如法而一。"

刘徽以大夫、不更爵次为例,对比说明衰分与返衰的意义。衰分,"欲令高爵得多",则大夫 1 人得 5,不更 1 人得 4,得比率(5,4);返衰,"令高爵出少",大夫 5 人出 1,不更 4 人出 1,得比率(1/5,1/4)。则需有化分数衰为整数的过程。

若返衰术是以 $1/a_1, 1/a_2, \cdots, 1/a_n$ 为衰,将分数衰化为整数,其余的演算便与衰分术相同。而这个转化的算法就是通分之法的"母互乘子",在筹算板上进行时,母数皆不动,子数因被母数互乘而有所变"动"(当为 $a_1 \cdots a_{i-1} \cdot a_{i+1} \cdots a_n$),故称通分后的子为"动者",母即为"不动者"。"动者为不动者衰"即以"动者"(a_1

$\cdots a_{i-1}\cdot a_{i+1}\cdots a_n$）代替原分母“不动者”（$a_i$）为衰，实现了化返衰为衰分的目的。即在中算家那里，返衰与衰分二者是统一的。

均输是按人口的多少，路途的远近来摊派赋税、徭役，它是组合着若干成正比与反比的量的复杂的分配问题。例如，担负徭役的各县户数依次为a_1，a_2，…，a_n；各县至输所行日数为b_1，b_2，…，b_n。摊派的徭役数应是户数多者多出，路程远者少出。前者以（a_1，a_2，…，a_n）为列衰，后者以（$1/b_1$，$1/b_2$，…，$1/b_n$）为返衰。刘徽注云：

“令县户数，各如其本行道日数而一，以为列衰。”

即均输问题最后归结为以（a_1/b_1，a_2/b_2，…，a_n/b_n）为列衰的衰分术求解。

现代所说的正比、反比、复比、连锁比、比例分配等各种比例问题，在我国古代筹算中都统一归结为今有与衰分去解决。所以刘徽注中常用“今有衰分求之”的话。此外，《九章算术》中还有许多现今看来不属比例问题的题问，也用今有、衰分求之。如“均输”章的“客去忘持衣”，“兔走犬追”，“凫雁相遇”等题都化为比率算法求解。中算家对比率理论的应用既广泛又巧妙。刘徽更是把盈不足术与“方程”术都以率统之，把比率视为算法的核心。

三、盈不足术

盈不足术是古代数学中假设试验与逻辑推理两种方法交互运用的产物。以“盈不足”章“蒲莞并生”问为例。题曰：

今有蒲生一日，长三尺。莞生一日，长一尺。蒲生日自半，莞生日自倍。问几何日而长等？

按现代算法，设x天蒲莞等长，有蒲生x日之长为$6(1-1/2^x)$；莞生x日之长为2^x-1。得方程

$$6(1-1/2^x)=2^x-1。\qquad (2.6)$$

解之得　$x=\log_2 6\approx 2.59$。

古人则以不同的观点解决了这一超越方程问题。中算家所建立的模型是：蒲莞生长的速度是与日数相关的变速运动，不同日有不同的速度，而在一日内其生长速度是均匀的。即它的速度函数是逐日水平的，构成今天所谓的阶梯函数。① 则此问使用盈不足算法实质就是，在相应模型下，不足整日部分用比例插值法求解问题，而整日的数据则求助于假设试验。

盈不足公式的造术源自比率算法，刘徽阐明了这一点。其文云：

“按盈者，谓之朓；不足者，谓之朒。所出率谓之假令。盈朒维乘两设者，欲为齐同之意。据共买物，人出八，盈三；人出七，不足四，齐其假令，同其盈朒，盈朒俱十二。通计齐则不盈不朒之正数，故可并以为实。并盈不足为法。齐之三十二者，是四假令，有盈十二。齐之二十一者，是三假令，亦朒十二。并七假令合为一实，故并三、四为法。”

从以上刘徽来看，盈不足公式的推证乃从分析两设（x_1 和 x_2）与盈朒（y_1 与 y_2）等数量之间的比率关系入手。古人常把问题中的有关数据按一定顺序排列起来寻求它们的比率关系：“每人出钱 x_1，买物 1，盈钱 y_1；每人出钱 x_2，买物 1，不足钱 y_2”。将之在算板上排列对应，有

$$\begin{matrix}\text{人出钱}\\ \text{买　物}\\ \text{盈　朒}\end{matrix}\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & 1 \\ y_2\ (\text{朒}) & y_1\ (\text{盈}) \end{pmatrix}$$

容易看出每行中的数可以成比例地变化，即有“每人出钱 kx_1，买物 k，盈钱 ky_1；每人出钱 $k'x_2$，买物 k'，不足钱 $k'y_2$”。这就是说，

① 王荣彬．中国古代历法中的插值法构建原理，中国古代数理天文学探析．西安：西北大学出版社，1994，253～258

上面的筹算式中的每行构成一组率。所以术文将所出数称为所出率。既然每行相与成率，于是便可施以诸比率变换。如由齐同术可得：

$$\begin{matrix}\text{人出钱}\\ \text{买　物}\\ \text{盈　朒}\end{matrix}\begin{pmatrix}x_2y_1 & x_1y_2\\ y_1 & y_2\\ y_2y_1 & y_1y_2\end{pmatrix}$$

即“人出钱 x_1y_2，买物 y_2，盈钱 y_1y_2；人出钱 x_2y_1，买物 y_1，不足钱 y_2y_1”。此时盈、朒之数相同而相抵消，得“人出钱 $x_1y_2+x_2y_1$，买物 y_2+y_1，不盈不朒。”再由今有术便得：买物“1”，人应出钱“$(x_1y_2+x_2y_1)/(y_1+y_2)$”。全部演算过程的筹式变可如下示之：

$$\begin{matrix}\text{假令}\\ \text{买物}\\ \text{盈朒}\end{matrix}\begin{pmatrix}x_2 & x_1\\ 1 & 1\\ y_2\text{（朒）} & y_1\text{（盈）}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{齐同术}}\begin{pmatrix}x_2y_1 & x_1y_2\\ y_1 & y_2\\ y_2y_1 & y_1y_2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{通计}}\begin{pmatrix}x_1y_2+x_2y_1\\ y_2+y_1\\ \text{不盈不朒}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{今有术}}\begin{pmatrix}\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_2+y_1}\\ 1\\ \text{不盈不朒}\end{pmatrix}。$$

从上面的演算中可以看出，齐同之后的买物数及“假令”的倍数正好是齐同之前的盈、朒之值，故在数值上可相互代替而不必重复列出，从而可将上面的筹式简化如下：

$$\begin{pmatrix}x_2 & x_1\\ y_2 & y_1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{维乘}}\begin{pmatrix}x_2y_1 & x_1y_2\\ y_2 & y_1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{相并}}\begin{pmatrix}x_1y_2+x_2y_1\\ y_1+y_2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{实如法而一}}\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}。$$

这就是《九章算术》盈不足术所说的：“置所出率，盈、不足各居其下。令维乘所出率，并以为实。并盈、不足为法。实如法而一”。

四、“方程”术

从刘徽的有关注释知，“方程”术也是比率算法的应用科目。

“程，课程也。群物总杂，各列有数，总言其实，令每行为率。二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之‘方程’。行之左右无所同存，且为有所据而言耳。”

“方程”是由更早的“程禾”算法发展而来。“程，课程也”。说明“程”与“课”同义而相通。“课”本义是试验、考核。“程禾”即考核粮食作物的产量。古人测产取上、中、下三等禾若干捆脱粒计量，每做一次这样的试验叫做一程。

“群物总杂，各列有数，总言其实，令每行为率”。把每次考核的结果记录在筹算板上，排成由上至下的竖行，其上下各列依次为禾之秉数，最下列为实之总和。这样就把每一“程”具体化为筹算板上一行数码，这行相关的各数恰可视为一组比率。总而言之，古人的“程禾”实为“课率”，即通过试验考核寻找出群物与总实之数量间的一组比率关系。

“二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之‘方程’”。说明古代数学家知道，要使问题获得解答，课率的次数，应与题中之物数相等。有几物就列几行，则各“程”中的数码便布列成一个筹码方阵。可见，“方”是指筹式的外形。

“行之左右无所同存，且为有所据而言耳”。说的是“方程”任两行不能相同，而且每行中的数据都有实际的依据，非随意臆造。两行相同可有两种情形：一是两行的数据完全一样；一是两行作为两组率，它们有相同的“势”，即对应各率成比例。这两种情形实质是相通的。

综上，刘徽的“方程”注所定义的“方程”满足以下条件：

（1）方阵中的每行为一组率；

（2）除下实一列外，方阵中的行数与列数相等；

（3）方阵中不能有两行相同或成比例。

这实际上定义了相当于现代所说的适定的线性方程组的增广矩阵。

正由于“方程”满足条件（1），“方程”的演算即可按率的有关等值变形规则进行。有所谓“遍乘”、“直除”等变换。而它们按刘徽的解释则为率的“齐同”。今以方程章第1问为例说明。其术文演算过程可如下式示之：

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&1&1\\26&34&39\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{遍乘}}\begin{pmatrix}1&6&3\\2&9&2\\3&3&1\\26&102&39\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{直除}}\begin{pmatrix}1&&3\\2&5&2\\3&1&1\\26&24&39\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{遍乘}}\begin{pmatrix}3&&3\\6&5&2\\9&1&1\\78&24&39\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{直除}}\begin{pmatrix}&&3\\4&5&2\\8&1&1\\39&24&39\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{遍乘}}\begin{pmatrix}&&3\\20&5&2\\40&1&1\\195&24&39\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{直除}}\begin{pmatrix}&&3\\&5&2\\36&1&1\\99&24&39\end{pmatrix}^{①}\xrightarrow{\text{遍乘}}\begin{pmatrix}&&108\\&180&72\\36&36&36\\99&864&1404\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{直除}}\begin{pmatrix}&&108\\6&108&72\\36&&\\99&765&1305\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{遍约}}\begin{pmatrix}&&108\\&36&72\\36&&\\99&153&1305\end{pmatrix}$$

---

① 《九章算术》中原术遍乘、直除至此止，然后计算：下禾一秉之实$=\frac{99}{36}=2\frac{3}{4}$；中禾之实$=\frac{24\times36-99}{5}=153$；上禾之实$=\frac{39\times36-99\times2-153}{3}=333$；中禾一秉之实$=\frac{153}{36}=4\frac{1}{4}$；上禾一秉之实$=\frac{333}{36}=9\frac{1}{4}$. 以下的遍乘、直除演算步骤则为刘徽注给出。且刘徽注指出此举“犹不如用其旧，广异法也.”

$$\xrightarrow{\text{直除}}\begin{pmatrix} & & 108 \\ & 36 & \\ 36 & & \\ 99 & 153 & 999 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{遍约}}\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \\ \frac{11}{4} & \frac{17}{4} & \frac{37}{4} \end{pmatrix}。$$

关于以上遍乘而后直除的理论根据，刘徽注指出它本质就是率的齐同。刘徽注曰：

“先令右行上禾乘中行，为齐同之意。为齐同者谓中行上禾直减右行也。从简易虽不言齐同，以齐同之意观之，其义然矣。”

刘徽在方程章第7问注解中，提出了用互乘相消法来解“方程”。即将“遍乘”视为“齐”，而“互乘相消”则补全“同”的步骤。

总而言之，刘徽释“方程”，乃将“方程”的每一行视为一组率；方程术的“遍乘直除”与“互乘相消”就是率的“齐同”。通过这种程序化的演算，使“方程”的行中之“物”逐一缺位，以至于化成行中只有一物与实相通，再归于今有术求解。所以说，在刘徽的体系中“方程”理论乃是比率理论的应用与发展。

率在几何问题中亦有广泛的应用，如解勾股形类的算法，刘徽都用勾股比率论为其理论基础。因这些内容在其它章节另有叙述，不再重复。而刘徽重差术的基础正是勾股比率的发展应用，我们将在下节中专门论述。

第三节　从勾股比率论到重差术

纵观《九章算术》勾股章刘徽注，明显地表现出刘氏有以勾股比率论统驭勾股类问题及勾股测量问题的意图。进而“造重差”，撰《海岛算经》。将解勾股形及测望之术建立在比率理论基础之上，构成了我国传统几何独特风格。

一、相似勾股形理论

刘徽的相似勾股形理论（或称勾股比率论）的核心，就是他在勾股章第15问“勾股容方术”注中提出的“不失本率”原理。注云：

“幂图方在勾中，则方之两廉各自成小勾股衰，而其相与之势不失本率也。”

是说在勾股容方图（图5·2·1）中，“方”之两面所成的两个小勾股形，其对应勾、股、弦三边之比率与原勾股形相同。即：

$$OE : DE : DO = BH : OH : OB = BA : DA : OB。\qquad (2.7)$$

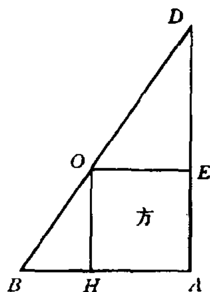


图5·2·1
勾股容方

勾股章自第17题以下求邑方与测木高、井深诸术，都是从勾股容方问题演化而来，只是将“勾股容方”演化为“勾中容横”或“股中容直”的情形。质言之，刘徽的“不失本率”原理实际上是对“容方”、“容横”、“容直”普遍而言的。

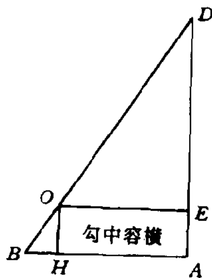


图5·2·2

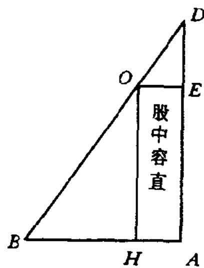


图5·2·3

据比例性质易知，不失本章原理等价于命题：“凡勾中容横，股中容直，二积相同。”即在图5·2·4中有

$$S_{甲}=S_{乙}。\tag{2.8}$$

式（2.8）可由“出入相补”原理证明，杨辉称这个命题为勾股测量的“源”。其实这个“源”乃沟通相似勾股形理论与“出入相补”原理的桥梁。大概可以说，“不失本率”原理是建立在“出入相补”这一更为普遍的原理之上的。

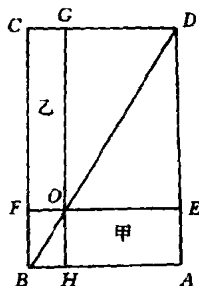


图 5·2·4

不失本率原理虽然仅就勾股容方之类图形而言的，它却实际上概括了相似勾股形的判定与性质定理。可以说，中算家是用“容方”、“容横”之类的构图代替了西方的平行线，收到了异曲同工之效。

刘徽又将不失本率原理得到的比例关系式与今有术结合，得到一般的勾股测望公式

$$见勾=\frac{见股\times勾率}{股率},\tag{2.9}$$

或

$$见股=\frac{见勾\times股率}{勾率}。\tag{2.10}$$

更用比率性质推广得

$$见勾=\frac{(见勾+见股)\times勾率}{勾率+股率}\tag{2.11}$$

及

$$勾=\frac{(勾+股+弦)\times勾率}{勾率+股率+弦率},\tag{2.12}$$

从而建立了古代勾股测望的理论基础。

二、景差原理与重差术

我国在西汉时主张盖天说的天文学派提出“地隔千里，景长差一寸”的景差原理，但这种“景长”与“地隔”两者之比率固定不变的说法乃以天地为相互平行的平面的假设为依据，它已被

南北朝时代的何承天和唐代的僧一行等人的实际测量所否定。

刘徽在《九章算术》注的序中云：

“周官大司徒职，夏至日中立八尺之表，其景尺有五寸，谓之地中。说云南戴日下万五千里。夫云尔者，以术推之。……徽寻九数有重差之名，原其指趣乃所以施于此也。”

把依景差原理推求的南戴日下公式依重差术释之为：

$$\text{南戴日下}=\frac{\text{景长}\times\text{千里}}{1\text{寸}}, \tag{2.13}$$

即

$$\text{南戴日下}=\frac{\text{景长}\times\text{地差率}}{\text{景差率}}, \tag{2.14}$$

其中，“地差率”即两表相隔之地的长度“千里”；“1 寸”为南北两表的景长之“差率”，分别对应式（2.10）的股率与勾率。

何谓重差？古今中外学者有过种种解释，诸如，“重测取差”，“两个差数之比”，“二重差分法”，“重用勾股”等等。其实，刘徽原序已对重差术的来源和涵义作了全面的说明。序曰：

“凡望极高、测绝深而兼知其远者，必用重差，勾股则必以重差为率，故曰重差也。”

说明重差术产生于测量日之高远等。这种测极高、绝远的实例中，其“端旁不能互见”，在计算中要用“两个差数”来代替勾股测量中的勾率和股率，是以“重差”得名。

刘徽在原序中列举日高术的两个基本公式：

$$\text{日去地}=\frac{\text{表高}\times\text{表间}}{\text{景差}}+\text{表高}, \tag{2.15}$$

$$\text{南戴日下}=\frac{\text{南表景}\times\text{表间}}{\text{景差}} \tag{2.16}$$

便是典型的重差公式，其《海岛算经》9 问便是由日高术推衍变化而得。

事实上，式(2.15)及(2.16)是式(2.10)发展而来的思路十分简单，如图 5·2·5。由勾股不失本率原理有

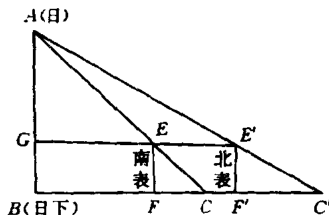


图 5·2·5

$$\frac{AG}{EF}=\frac{GE}{FC} \text{ 和 } \frac{AG}{E'F'}=\frac{GE'}{F'C'}，\text{其中 } EF=E'F'，\text{从而}$$

$$\frac{AG}{EF}=\frac{GE'}{F'C'}=\frac{GE}{FC}。$$

再据比例性质便得以“重差为率”之式

$$\frac{AG}{EF}=\frac{GE'-GE}{F'C'-FC}=\frac{GE}{FC},$$

所以　$AG(\text{日去表})=\dfrac{EF\times(GE'-GE)}{F'C'-FC}$，

$$GE(\text{南戴日下})=\frac{FC\times(GE'-GE)}{F'C'-FC}。$$

综上，我国古代测望之学经历了从勾股比率论到重差术的发展历程，而勾股比率论又建立在极其简单易明的出入相补原理之上。所创造出的精深奥妙的重差诸术充分体现了我国古算“原理简明与应用广泛互相辉映”的独特风格。我国古代的上述测望理论不仅绕过了一般相似形方法，且无需涉及角的度量与性质，这种以多次简易的长度测量代替较难的角度测量的原理，对于提高测量精度无疑具有重要的实际意义。

第三章　刘徽对整勾股数的贡献

第一节　整勾股数

所谓整勾股数问题即是求不定方程

$$x^2+y^2=z^2 \tag{3.1}$$

的所有整数解。我们把满足方程（3.1）的三个整数所组成的集合(x, y, z)称为整勾股弦三元数。

显然，若(x, y, z)是一个整勾股弦三元数组，则每个数都同乘以整数k后，所得三元数组(kx, ky, kz)也是整勾股弦三元数组，反之亦然。所以，求解（3.1）式，只要求出所谓本原三角形就足够了；本原三角形是指三边没有公因数k（>1）的直角三角形。

据本原三角形的概念，我们可以给出一个更强的本原三元数组的定义：

在本原三元数组中，任意两个数均互素，即有

$$(x, y)=1,\ (x, z)=1,\ (y, z)=1; \tag{3.2}$$

且x、y、z中，x与y必为一奇一偶，不妨约定y是偶的，z则一定是奇数。

为求(3.1)式的本原解，我们先把它写成

$$y^2=z^2-x^2=(z+x)(z-x)。 \tag{3.3}$$

由于y是偶的，而x与z都是奇的，所以三个数

$$z-x,\ y,\ z+x$$

皆是偶的。这样，式（3.3）两边可同除以4，得到

$$\left(\frac{1}{2}y\right)^2=\frac{1}{2}(z+x)\cdot\frac{1}{2}(z-x)。$$

令①

$$u^2=\frac{1}{2}(z+x),v^2=\frac{1}{2}(z-x)。\qquad(3.4)$$

从而得

$$\begin{cases}x=u^2-v^2,\\ y=2uv,\\ z=u^2+v^2。\end{cases}\qquad(3.5)$$

不失一般性，这里可取$u>0$，$v>0$。由(3.4)知

$$(u,\ v)=1,\ u>v。$$

直接验证可知式(3.5)是方程(3.1)的解。且，可以证明：式(3.5)中的u与v对应于所有本原三角形(即式(3.5)是方程(3.1)通解)的充要条件是

$$\begin{cases}(1)\ (u,\ v)\ =1,\\ (2)\ u>v>0,\\ (3)\ u与v中一个是偶的，另一个是奇的。\end{cases}\qquad(3.6)$$

这样一来，从式(3.5)就可以得到所有本原三角形。表5.3.1给出了对应于最初一些u与v的所有本原三角形。下划线者为《九章算术》中已给出。

表5.3.1　$v<u\leqslant 10$的所有本原三元数组

v \ u	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3,4,5		15,8,17		35,12,37		63,16,65		99,20,101
2		5,12,13		26,20,29		45,28,53		77,36,85	

① 这样令是依据了以下事实：

(1) 若$(z,x)=1$，z，x都是奇数，则$\left(\frac{1}{2}(z+x),\ \frac{1}{2}(z-x)\right)=1$；

(2) 若两个互素数的乘积是一个平方数，则这两个互素的数也分别都必是平方数。

（续上表）

v \ u	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3			7,24,25				55,48,73		91,60,109
4				9,40,41		33,56,65		65,72,97	
5					11,60,61		39,80,89		
6						13,84,85			
7							15,112,113		51,140,149
8								17,144,145	
9									19,180,181

第二节　《九章算术》对整勾股数的描述

整勾股形与勾股定理可谓是一对孪生兄弟。据《周髀算经》称，相传大禹治水之时，人们便已发现勾三股四弦五的勾股形。3、4、5 是最简单的一组勾股数，它们之间简单的数量关系

$$3^2+4^2=5^2。$$

对勾股定理的发现或许是个契机。因而，多数数学史论著都将“勾三股四弦五”视为勾股定理的特例。这意味着，似乎古代算家就是在对整勾股数的研究中发现了勾股定理？然而，更合乎逻辑的说法是，古代整勾股数的研究早在勾股定理发现之时便已开始了。

《九章算术》勾股章的题设中包含着丰富的整勾股数内容。全章共 24 问，其中涉及的勾股形大多为整数勾股形，只是在章末有 7 道勾股测量问题例外。因问题的性质所限，多不涉及弦而仅用勾股比率求解，故其弦多为无理数。表 5.3.2 对勾股章各题涉及整勾股弦者作了统计分析。

由表 5.3.2 可看出，《九章算术》勾股章题问中共给出了 8 组不同的本原三角形（表 5.3.1 中相应的数组下有下划线）。在当时，如果没有一定的方法而靠盲目试算来找出这样一些整勾股数恐不

大可能。

表 5.3.2　《九章算术·勾股》部分题问勾股弦数一览表

题号	勾股弦数	勾股弦约简	题号	勾股弦数	勾股弦约简
1	(3,4,5)	(3,4,5)	9	(10,24,26)	(5,12,13)
2	(3,4,5)	(3,4,5)	10	(100,495,505)	(20,99,101)
3	(3,4,5)	(3,4,5)	11	(28,96,100)	(7,24,25)
4	(7,24,25)	(7,24,25)	12	(6,8,10)	(3,4,5)
5	(20,21,29)	(20,21,29)	13	$(3,4\frac{11}{20},5\frac{9}{20})$	(60,91,109)
6	(5,12,13)	(5,12,13)	14	$(10,10\frac{1}{2},14\frac{1}{2})$	(20,21,29)
7	$(8,9\frac{1}{6},12\frac{1}{6})$	(48,55,73)	15	(5,12,13)	(5,12,13)
8	(100,495,505)	(20,99,101)	16	(8,15,17)	(8,15,17)
			21	(8,15,17)	(8,15,17)

事实上，《九章算术》的作者在勾股第 14 问及第 21 问中已经提出和应用了相当于式(3.5)的整勾股数公式。现以第 14 问为例，说明中算家的这一重大成就。

今有二人同所立。甲行率七，乙行率三。乙东行，甲南行十步而邪东北与乙会。问：甲、乙行各几何？

设甲行率为 m，乙行率为 n，则 $m:n=7:3$，由题设，甲行勾与弦，即 m 为“勾弦并率”；乙行股，n 即股率。问题归结为已知勾弦并率及股率，又知勾，求股与弦。

术曰：令七自乘，三亦自乘，并而半之，以为甲邪行率。邪行率减于七自乘，余为南行率。以三乘七为乙东行率。置南行十步，以甲邪行率乘之，副置十步，以乙东行率乘之，各自为实。实如南行率而一，各得行数。

该术的前半给出了勾率（南行率），股率（东行率）及弦率（邪行

率)，即

$$x : y : z = \frac{1}{2}(m^2 - n^2) : mn : \frac{1}{2}(m^2 + n^2)。\qquad (3.7)$$

有了勾股弦三者的比率及已知之勾数（见勾），即可依勾股比率算法求出股与弦。上引之术的后半即给出算式

$$见股 = \frac{见勾 \times 股率}{勾率}, \qquad (3.8)$$

$$见弦 = \frac{见勾 \times 弦率}{勾率}。\qquad (3.9)$$

诚如刘徽注所云：

“南行十步者，所有见勾。求弦、股，故以弦、股率乘，如勾率而一。”

式(3.7)与式(3.5)是等价的，都是方程(3.1)的通解。事实上，作变换

$$\begin{cases} m = u + v, \\ n = u - v。\end{cases} \qquad (3.10)$$

(3.7)即化为(3.5)，只是勾股位置对调了。这就是说，《九章算术》原术已给出了求所有本原三角形的公式。当然，欲使(3.7)为方程(3.1)的通解，m、n 须满足一定的条件，对照式(3.6)，易知只须

$$\begin{cases} (1)\ m > n > 0, \\ (2)\ (m, n) = 1, \\ (3)\ m 与 n 必须同是奇数。\end{cases} \qquad (3.11)$$

《九章算术》作者在术文中没有涉及式(3.11)的论述，但就其实际用例来看，这些条件已暗含于题设之中了。或许在多次依术构造整勾股弦的实践中，古代算家已对式(3.11)的内容有所认识。如本例的 $m : n = 7 : 3$；而第 21 问那里所用的 $m : n = 5 : 3$；刘徽注中也指出对所求出的勾股弦三者之比“当通而约之乃定”；等等。

问题是，上述《九章算术》有关整勾股数公式早在《九章算

术》成书时代是如何得到的。

从上面的分析知，《九章算术》原术要解决的问题是已知勾股弦的某些数量关系，要求未知的股与弦，问题的实质是在解勾股形。表 5.3.2 中所列的各问原本都是解勾股形问题，它们中或已知勾股弦三者中的两个而求第三者；或已知勾(股)弦并或差与勾(股)，而要求股(勾)、弦；或已知勾股差或并及弦而求勾、股；或已知勾弦差与股弦差，而要求的是勾、股及弦。但不论哪种情形，《九章算术》的作者都是以勾股定理为基础，通过简单的公式变形或图形割补而获得了问题的解答。第 14 问与第 21 问则与它们稍有不同，题设所给并非勾弦并与股，而只是给出勾弦并与股的比率为 7∶3 或 5∶3，因而，欲解决问题，必先求出勾、股、弦三者之间的比率。而这种从勾弦并率与股率出发推导出的勾、股、弦三率，即已实现了用两个参数(勾弦并率之数及股率之数)表示勾、股、弦的目的。也就是说，式(3.7)只是在特定的条件下解勾股形的副产品。换言之，中算家的整勾股弦公式来源于解勾股形的实践。

然而，这种从实际问题中抽象出具有普遍意义算法或公式的方法，正是中国古代算学的独特风格。

我们知道，现代数论中是通过探讨三个什么样的数可以满足方程(3.1)，并以含有两个参数的公式把所有的解表示出来。至于这两个参数在勾股形中是否有实际意义则无需深究。可见在求整勾股形数问题上，中算家使用了和现代数论中迥异的方法，二者殊途同归。

必须指出，不定方程的解用未知量间的比率形式给出，在《九章算术》及刘徽注中并非仅勾股章的 14 问及 21 问两例。“方程”章“五家共井”问的答案下，刘徽就申明乃“举率以言之”。

综上所述，中算家在解勾股形的实践中，通过勾（股）弦和与勾（股）之比，找到了利用这一对比数为参数的勾股弦三者成

比例变化的关系式。“率”是中国古代算学中最基本的概念，是中算家最为熟悉且应用自如的工具。它在整勾股数问题的研究上又一次发挥了重大作用。

当然，我们说勾股章第14问及第21问给出了方程(3.1)的一般解(3.7)式，并不代表说古代算家已经彻底地认识到了这一点。其实，古代其它各民族的学者也都是只解决了式(3.5)或式(3.7)是方程(3.1)的解；或者，方程(3.1)的解可以表达为(3.5)式或(3.7)式(丢番图也不例外)。真正解决(3.5)或(3.7)分别在条件(3.6)或(3.11)下给出(3.1)的全部正整数解的问题，是直到19世纪后半叶才有的事。19世纪70年代，德波丁纳（C. de Potigna）证明了(3.5)式在条件(3.6)下给出(3.1)的全部整数解；80年代皮乌马（C. M. Piuma）证明了式(3.7)在条件(3.11)下给出(3.1)的全部本原解。

第三节　刘徽对整勾股数公式的证明

关于整勾股数公式论证的记载，当推欧几里得的《几何原本》为最早。虽然有人通过对大量泥版的研究，以为古巴比仑已有推求整勾股数的公式；也有人认为在古希腊欧几里得之前，毕达哥拉斯、柏拉图等学派对整勾股数公式都曾证明过；因为他们的学派都为了绝对保密，所以现今却提供不出有力的证据。差不多与柏拉图同时，《九章算术》中列有两道整勾股数的问题；3世纪时，刘徽曾给予严密的证明。虽然刘徽较欧几里得为晚，但两者的证明却各有千秋。

《九章算术·勾股》第14问，上节已引，此处从略，

在术文之下，刘徽注称：

“此以南行为勾，东行为股，邪行为弦。股率三，勾弦并率七，欲知弦率者，当以股自乘为幂，如并而一，所得为勾弦差。加差

于并而半之为弦，以弦减差，余为勾。如是或有分，当通而约之乃定。术以勾弦并率为分母。故令勾弦并自乘为朱、黄相连之方。股自乘为青幂之矩，令其矩引之直，加损同之，以勾弦并为袤，差为广。其图大体，以两弦为袤，勾弦并为广。引横断其半为弦率，七自乘者勾弦并之率，故弦率减之余为勾率。同立处，是中停也。列用率皆勾弦并为袤，弦与勾各为之广，故亦以股率同其袤也。”“南行十步者，所有见勾求弦、股，以弦、股率乘，如勾率而一。”

第 21 问：今有邑方十里，各中开门。甲、乙俱从邑中央而出。乙东出；甲南出，出门不知步数，邪向东北磨邑，适与乙会。率甲行五，乙行三。问：甲、乙行各几何？

答曰：甲出南门八百步，邪东北行四千八百八十七步半，及乙。

乙东行四千三百一十二步半。

术曰：令五自乘，三亦自乘，并而半之，为邪行率。邪行率减于五自乘者，余，为南行率。以三乘五，为乙东行率。置邑方半之，以南行律乘之，如东行率而一，即得出南门步数。以增邑方半，即南行。置南行步求弦者，以邪行率乘之，求东者以东行率乘之，各自为实。实如南行率得一步。

在术文之下，刘徽注称：

“求三率之意，与上甲、乙同。”“邑半方，自南门至东隅五里以为小股。求出南门步数为小股之勾。故置邑方半之，以南行勾率乘之，如股率而一。”“半邑者，谓从邑心中停也。”“此术与上甲、乙同。”

根据第 14 问经文及术文，设甲、乙同立处为 C，同会处为 A；并设乙东行为 b，甲南行为 a，甲邪行为 c。又设甲行率（七）为 m，乙行率（三）为 n，由注文所说可知（如图 5・3・1）：

$$b:(a+c)=n:m=3:7,$$

或 $$(a+c):b=m:n=7:3。$$

按术即得南、东、邪行的比率为勾、股、弦三边的比率。也即：

$$勾:股:弦=a:b:c$$
$$=[7^2-(3^2+7^2)/2]:(3\times7):[(3^2+7^2)/2]$$
$$=20:21:29。$$

今按刘徽注推算勾、股、弦三者的比率：根据“股自乘为幂，如并而一，所得为勾弦差”。则得：

$$b^2/(c+a)=c-a。$$

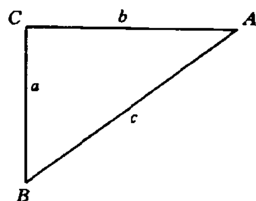


图 5·3·1

又根据“加差于并而半之为弦”，即

$$c=1/2[b^2/(c+a)+(c+a)]。$$

再根据“以弦减差，余为勾”，即

$$a=c-(c-a)。$$

分别以比率代入，则各得：

$$c=k/m[(n^2+m^2)/2],$$
$$a=k/m[(n^2+m^2)/2-n^2],$$

因而得勾、股、弦之比率为：

$$a:b:c$$
$$=k/m[(n^2+m^2)/2-n^2]:k(n):k/m[(n^2+m^2)/2]$$
$$=k[(n^2+m^2)/2-n^2]:k(mn):k[(n^2+m^2)/2],$$

其中k为参数。由于勾、股、弦的比率，可能出现分数，所以应通分约简以求其比率，故得：

$$a:b:c$$
$$=[m^2-(n^2+m^2)/2]:(nm):[(n^2+m^2)/2]$$
$$=[7^2-(3^2+7^2)/2]:(3\times7):[(3^2+7^2)/2]$$
$$=20:21:29。$$

据此可知，其中

$$a:b:c$$
$$=[m^2-(n^2+m^2)/2]:(n\times m):[(n^2+m^2)/2],$$

即是现今所谓刘徽证明的“勾股数公式”。

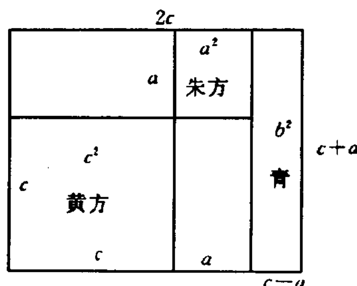


图 5・3・2

如图5・3・2所示，刘徽以勾弦和$(c+a)$为边作一正方形，其中勾幂(a^2)称为“朱方”，弦幂(c^2)称为“黄方”。也就是以“朱方”、“青方”相连之正方形。又因勾幂、股幂可合成弦幂，而“矩”形股幂可居于表，把“矩”形股幂引之直，使其长为勾弦和$(c+a)$、宽为勾弦差$(c-a)$的长方形，将此长方形与上述之正方形合拼成一大长方形；其长则为两弦$(2c)$、宽则为勾弦和$(c+a)$。因而即得下式：

$$(c+a)(c-a)+(c+a)^2=2c(c+a)。$$

中分此大长方形，则得两长方形；其长为勾弦和$(c+a)$、宽为弦c，其面积为弦与勾弦和之乘积$c(c+a)$，称为“弦率”。此外，以勾弦和$(c+a)$为边的正方形，称其面积$(c+a)^2$为“勾弦并率”。上述两形之差，即是以勾a为宽、以勾弦和$(c+a)$为长的长方形；面积为$(c+a)^2-c(c+a)=a(c+a)$，称为“勾率”。

根据以上所述，刘徽注所谓“弦率”、“勾弦并率”以及“勾率”，分别是以弦c、勾弦并$(c+a)$、勾a为宽，都是以勾弦并$(c+a)$为袤的长方形面积表示的。因而可知，“股率”当以股b为宽、以勾弦并$(c+a)$为袤的长方形面积来表示。于是，可知“勾率”、“股率”、“弦率”之比当为：

$$a:b:c$$

$$=[(c+a)^2-c(c+a)]:b(c+a):c(c+a)$$

$=k[m^2-(n^2+m^2)/2]:k(nm):[(n^2+m^2)/2]$

$=[7^2-(3^2+7^2)/2]:(3\times7):[(3^2+7^2)/2]$

$=20:21:29$。

其第21问所论，与此相似，仿此可得：

$a:b:c$

$=\{(c+a)^2-[b^2+(c+a)^2]/2\}:b(c+a):\{[b^2+(c+a)^2]/2\}$

$=[5^2-(3^2+5^2)/2]:(3\times5):[(3^2+5^2)/2]$

$=8:15:17$。

总上所述，可知刘徽以面积理论证明了“勾股数”的计算公式。虽然刘徽利用“勾股原理”论证这一公式，但并非意味着凡是由“勾股原理”推导出来的公式，都可看作是“勾股数”的公式。例如：

设勾股差为q，弦为p，由第11问可以导出：

$a=1/2[\sqrt{2p^2-q^2}-q]$；

$b=1/2[\sqrt{2p^2-q^2}+q]$；

$c=p$。

又设股弦差为s，勾弦差为t，由第12问可以导出：

$a=\sqrt{2st}+s$；

$b=\sqrt{2st}+t$；

$c=\sqrt{2st}+s+t$。

在《九章算术·勾股》中，共计24问，其中涉及勾、股、弦互质的数据竟有八组之多，计：勾a、股b、弦c分别为

3、4、5；　5、12、13；　7、24、25；

8、15、17；　20、21、29；　20、99、101；

48、55、73；　60、91、109。

依此足证秦、汉时代对勾股数研究的一般情况，而《九章算术》提出有关勾股数的问题，绝不是偶然的，而是对勾股术研究

的自然延伸。直到三国时代，刘徽给予严格的证明，而是刘徽对“出入相补”原理及“比率理论”深邃理解和熟练应用的自然形成。刘徽的证明，虽然其代数意义似嫌不足，但是其几何意义却是十分明显的。若就时间而论，刘徽所推证的“勾股数”公式虽较诸欧几里得为晚，但却领先于希腊丢番图[①]的论证。

① 钱宝琮．钱宝琮科学史论文选集．北京：科学出版社，1983

人名索引

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

O

P

Q

R

S

W

X

Y

Z